

城市地理研究中的单分形、多分形和自仿射分形

陈彦光

(北京大学城市与环境学院城市与经济地理系, 北京 100871)

摘要:分形几何学在城市地理研究中具有广泛的应用,然而很多基本概念却让初学者感到迷惑。如何区分单分形、自仿射分形与多分形,是一个基本而重要的问题。简单分形容易理解,而真实的地理现象很少是单分形的。城市生长过程具有自仿射特征,而城市空间格局却具有多分形性质。作者发现,各种分形的共性在于三个方面:标度律、分数维和熵守恒。论文基于标度、分维和熵守恒公式,借助隐喻城市生长的规则分形来区分单分形、多分形和自仿射分形,讨论分形系统演化的机理、分形与空间自相关和空间异质性的联系,同时澄清一些在地理分形研究中的常见错误概念。最后以城市位序-规模分布为例,说明并对比单分形和多分形在城市地理研究中的建模与应用思路。

关键词:地理分形;单分形;双分形;多分形;自仿射分形;多分维谱;分形城市

地理世界存在大量的没有特征尺度的现象,这类现象无法采用传统的数学方法有效刻画,但可以借助分形几何学描述其空间和统计特征。分形理论和方法在地理研究中的重要性正在日益凸显,并且越来越多的人开始重视分形和分维分析。在地理文献中,目前涉及4类常见的分形概念。其一是单分形(monofractal, unifractal),这是研究最多、应用最广的一类自相似分形(Lam et al, 1993; Batty et al, 1994; Frankhauser, 1994; 朱晓华, 2007);其二是双分形(bi-fractals),这类分形的概念有些含混,其性质引起了诸多误解(Benguigui et al, 1991; White et al, 1993, 1994);其三是多分形(multifractals),这是相对复杂、非常迷人而又容易令人望文生义、形成误解的一类分形(Appleby, 1996; Chen et al, 2004; 陈彦光, 2008; Ariza-Villaverde et al, 2013; Chen et al, 2013; Murcio et al, 2015);其四是自仿射(self-affine)分形,这类分形在现实中难以识别,在理论上容易与多分形混为一谈(Chen et al, 2009)。由于对多分形的误解,人们常常将双对数坐标图上的曲线关系当成了多分形;由于对各向异性与生长概率的混淆,人们常常将自仿射现象当成了多标度现象。如

果不将不同的分形类型和分维概念澄清,则研究者很难正确地借助分形建模和分维分析研究城市地理现象。

城市地理学是应用分形较多的领域,因为城市形态、城镇体系、城市规模分布,如此等等,都没有特征尺度,传统的概率论、统计学在无尺度现象分析方面都显得苍白无力,分形几何学却在这里找到了用武之地(陈彦光, 2015)。然而,城市分形研究中也存在大量的概念混淆:非分形被当成了多分形,自仿射分维被误会为自相似分维,诸如此类,以讹传讹,既影响了分形城市理论和应用研究,也对分形城市研究的效果形成负面影响(陈彦光, 2017)。有感于此,作者以城市系统为例,根据自己多年的分形城市研究经验,撰写通俗易懂的文章,试图澄清一些被误解乃至扭曲的概念。最基本的,是区分单分形、双分形、自仿射分形和多分形。下面分为三步论述。首先,以数学分形即规则分形(regular fractal)中的生长分形(growing fractals)为例,从城市生长研究的视角,利用几何图形说明上述分形的联系与区别;然后,借助一个关键性的分维方程式论证简单分形、自仿射分形和多分形的异同,并且讨

收稿日期:2018-02-25;修订日期:2018-07-06。

基金项目:国家自然科学基金项目(41671167)。[Foundation: National Natural Science Foundation of China, No.41671167.]

作者简介:陈彦光(1965—),男,河南罗山人,教授,博士,从事城市和理论地理学研究。E-mail: chenyg@pku.edu.cn

引用格式:陈彦光. 2019. 城市地理研究中的单分形、多分形和自仿射分形[J]. 地理科学进展, 38(1): 38-49. [Chen Y G. 2019. Monofractal, multifractals, and self-affine fractals in urban studies. Progress in Geography, 38(1): 38-49.] DOI: 10.18306/dlkxjz.2019.01.004

论分形与城市地理研究的相关概念如空间自相关和空间异质性的关系;最后,以简明易懂的城市规模分布为例,演示多分形建模在城市研究中的应用基本思路。

1 单分形、双分形和多分形

1.1 各向同性的自相似分形

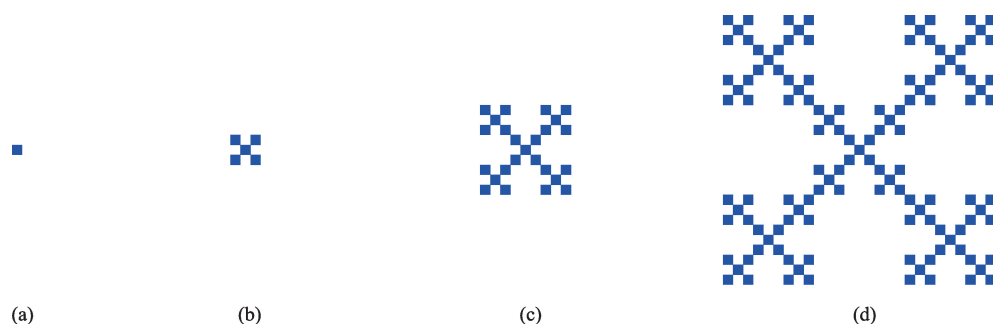
单标度分形就是通常所说的简单分形,简称单分形。以规则分形为例,单分形具有如下特点——这些特点并非各自独立,而是彼此相关的。第一,严格的自相似性(self-similarity)。局部放大与整体一样,整体缩小与局部一样。第二,各向同性(isotropy)。所谓各向同性,并非像圆一样,在无数个方向都表现相同的扩展速率。环形波状扩展是各向同性生长的极致。在数学意义上,在一个二维空间中,只有两个彼此垂直或者说正交的方向(orthogonal direction)。如果这两个相互正交的方向上扩散速度相同,就可视为各向同性。第三,一个标度因子。在结构不变的前提下,一连串的尺度伸缩过程就是标度过程。地理学家容易理解标度概念,因为地图按比例尺放大或者缩小的过程就是典型的标度过程。对于单分形,它的标度因子有且只有一个。也就是说,如果将局部(分形元)放大,使得它与整体一样,或者将整体缩小,使得它与局部一样,仅仅需要一个尺度比率(scaling ratio,简称“标度率”)。

简单的模型有助于理解复杂的结构。对分形有所了解的人,对图1所示这个规则的分形图应该比较熟悉。这里仅仅给出分形构造的前四步,第一步为初始元(initiator),第二步为生成元(generator)。似乎没有必要讨论如此简单的分形,之所以专门提到它原因在于如下方面:其一,在地理学中引用广

泛。这个分形是人们用以类比城市生长、区域凝聚乃至地理空间扩散的常用模型。著名城市地理学家 Batty 等(1994)、Frankhauser(1998)、Longley 等(1991)、White 等(1993)都曾引用过这种数学分形。其二,人们对这个分形有较多的误会,在此顺便澄清。这个分形最初由 Jullien 等(1987)构造——可能是通过修改 Mandelbrot(1982)的“平面 Fournier 宇宙”模型得到,或许可以称之为“Jullien-Botet 分形”。该分形因为 Vicsek(1989)的一本书而形成影响,国内不少学者称之为 Vicsek 分形,或者 Vicsek 雪花。在海外文献中,这个分形被叫做分形树、盒子分形(box fractal)、Sierpinski 地毯,等等。其实, Sierpinski 地毯另有图形,与此不同。其三,这个分形的变体有助于人们理解自仿射分形和多分形。Vicsek 自相似分形在两个彼此正交的方向上扩展速度相同,都是一化为三。数目比是 5,尺度比是 3(图 1a)或 1/3(图 1b),分维是 $D=\ln 5/\ln 3 \approx 1.465$ 。就尺度比而言,只有一个标度因子。

1.2 各向异性的自仿射分形

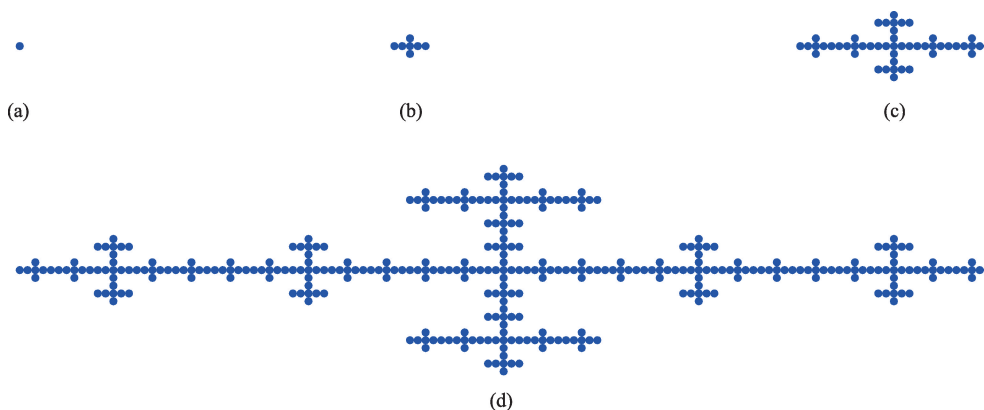
自仿射分形是相对于自相似分形而言的。自相似是自仿射的特例,或者说自仿射是自相似的推广。自仿射分形的特点如下。其一,给人印象最深刻的,是各向异性(anisotropy)。也就是说,在彼此正交的方向上,分形生长的速率不同。其二,不同的延伸方向具有不同的标度因子。如果在二维嵌入空间中考察分形,则相互正交的方向只有两个。此时自仿射分形在不同的方向具有两个不同的标度率,从而可以视为存在两个标度因子。下面这个分形是 Vicsek 给出的一个自仿射生长分形,可以用于类比城市的自仿射扩展过程(Chen et al, 2009)(图 2)。Vicsek 自仿射分形在两个相互正交的方向上扩展速度不一样,水平方向比垂直方向扩展得快。从



注:引自 Jullien et al, 1987; Vicsek, 1989; Batty et al, 1994

图1 用作各向同性城市生长模型的 Vicsek 自相似分形(前4步)

Fig.1 A regular self-similar growing fractal that bears an analogy to isotropic urban growth (the first four steps)



注:引自 Vicsek, 1989

图2 用作类比各向异性城市生长的Vicsek自仿射分形(前4步)

Fig.2 A regular self-affine growing fractal that bears an analogy to anisotropic urban growth (the first four steps)

第二步即分形生成元可以看出,在不同的方向上,数目比都以7计算,但尺度比不同:水平方向一化为五,垂直方向一化为三。因此,水平方向的尺度比即标度因子是5,相应的分维 $D=\ln 7/\ln 5 \approx 1.2091$;垂直方向的尺度比是3,相应的分维是 $D=\ln 7/\ln 3 \approx 1.7712$ 。可见,这种分形在纵横两个方向需要两个维数来描述。

1.3 多分形和多分形测度

多分形又叫多标度分形(multi-scaling fractals),指的是具有两个或两个以上的标度过程的分形。在延伸方向上,多分形是各向同性的。然而,在不同的区域、层次或者尺度上,多分形体具有不同的生长几率。在整个多分形的发育过程中,至少存在两个标度率决定其生长过程。与自仿射分形不同,两个或多个标度率表现在不同的区位上,而不是表现在生长方向上。利用多分维谱可以揭示不同区位、不同尺度的空间信息,因此该方法引人入胜,但较之于简单分形,理解起来显得更为困难。下面以一个规则生长分形前三步为例,说明多分形的生成、特征和描述方法(图3)。这个分形曾被中国学者用于类比人口分布和集聚(王放等, 1995)。从图形上看,这个分形首先一分为十七,但中心与外围的生长几率不一样。中心区位的生长几率是1/17,尺度为1/5;外围四个区位的生长几率是4/17,尺度为2/5。虽然从概率和尺度上看,这个分形只有两个标度因子,但扩展之后,不同的区位有不同的生长几率。这样,简单的规则通过自相似过程导致复杂的空间格局,这正是多分形的奇异之处。

多分形的刻画需要两套参数:全局参数(global parameter)和局部参数(local parameter)。全局参数

在质上偏重整体,在量上偏重累计;局部参数在质上偏重部分(个体、单元、层次),在量上偏重变化(速度、密度)。全局参数包括广义关联维数(generalized correlation dimension) D_q 和质量指数(mass exponent) $\tau(q)$,后者是一种特殊的全局标度指数;局部参数包括 Lipschitz-Hölder 奇异性指数(Lipschitz-Hölder exponent) $\alpha(q)$ 和支持这个指数的分形集的分维(fractal dimension of support set) $f(\alpha(q))$,前者是一个特殊的局部标度指数。这里参数 q 在统计学中叫做矩的阶次(order of moment),简称矩次。这两套参数可以借助 Legendre 变换联系起来:计算了全局参数,可以得到局部参数;计算了局部参数,可得全局参数。从这个意义上讲,两套参数理论上等价,但它们所反映的分形特征的角度不同。最基本的测度是广义关联维数,定义如下(Hentschel et al, 1983; Halsey et al, 1986; Feder, 1988)

$$D_q = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{I_q(r)}{\log r} = \frac{1}{q-1} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(r)} P_i(r)^q}{\log r} \quad (1)$$

式中: D_q 为广义关联维数; $P_i(r)$ 为线性尺度为 r 的第 i 个分形元的生长概率; $N(r)$ 为线性尺度为 r 的分形元的数目。 $I(r)$ 表示 Renyi 广义熵,即有

$$I_q(r) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^{N(r)} P_i(r)^q \quad (2)$$

如果矩次等于1,则 Renyi 熵可以通过 L'Hôpital 法则化为常见的 Shannon 信息熵

$$I_1(r) = -\sum_{i=1}^{N(r)} P_i(r) \log P_i(r) \quad (3)$$

式(1)给出随矩次 q 而改变的广义维数谱 D_q 。当 $q=0$ 时, $D_q=D_0$ 为容量维数(capacity dimension)——它是

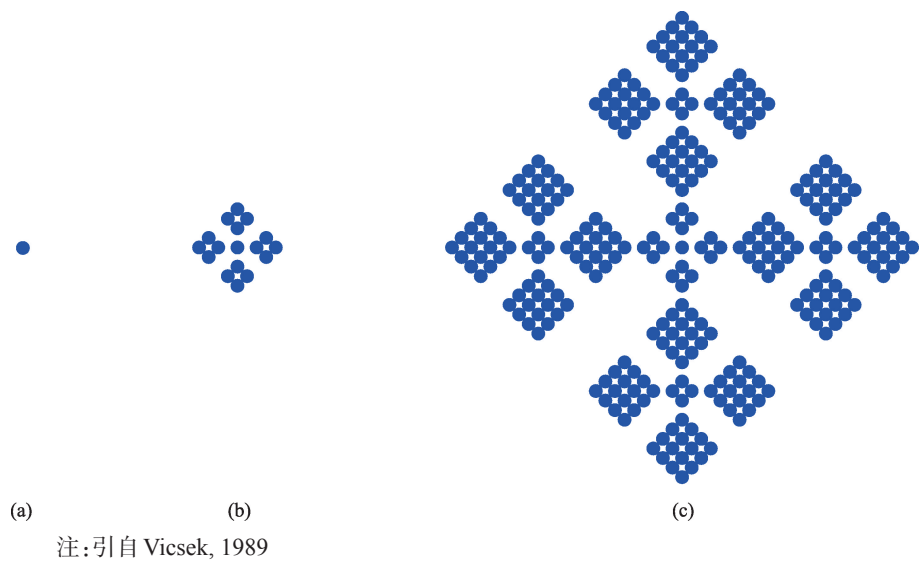


图3 用于类比复杂城市生长的Vicsek多分形(前3步)

Fig.3 A growing multifractals that bears an analogy to complex urban growth (the first three steps)

局部分维 $f(\alpha)$ 的极限;当 $q=1$ 时, $D_q=D_1$ 为信息维数(information dimension);当 $q=2$ 时, $D_q=D_2$ 为关联维数(correlation dimension)(Grassberger, 1983)。容量维是空间填充指数,信息维是空间均衡指数(可转为差异指数),关联维是空间联系指数。理论上,矩次连续变化于正负无穷大之间,即有 $q\in(-\infty, +\infty)$ 。然而在实际中,这个参数的变化范围是有限的,一般可取离散值 $q=\cdots, -50, -49, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, 49, 50, \cdots$ 。对于图3所示的多分形,根据其标度因子和相应的生长几率可知,其广义关联维数变化于1.5791~1.7604之间,即有

$$D_{+\infty} = \frac{\ln(4/17)}{\ln(2/5)} \approx 1.5791, D_{-\infty} = \frac{\ln(1/17)}{\ln(1/5)} \approx 1.7604$$

低分维 $D_{+\infty}$ 对应于生长概率高(密度高)的边缘区域被放大的情形,高分维 $D_{-\infty}$ 对应于生长概率低(密度低)的中心区域被放大的情况。计算了广义维数之后,可以借助相关公式和数学变换将全部参数值估计出来(表1)。可以看出,在极限条件下, $D_{-\infty}-D_{+\infty}=\alpha(-\infty)-\alpha(\infty)$,即广义维数的极差接近于奇异性指数的极差。需要说明的是,如果采用盒子计数法或者Sandbox法计算多分维,则得到的容量维实际上是分维上限,即有 $D_0=D_{-\infty}$,从而 $D_{-\infty}$ 值上浮。这样,经验上计算的多分维谱,其广义维数和奇异性指数都可能突破嵌入空间的欧氏维数局限,即有 $D_{-\infty}=\alpha(-\infty)>d=2$ 。但是,突破的数值不会太多(一般小于0.2)。如果计算的结果 $D_{-\infty}>2.5$,则要么算法存在问题,要么系统的结构存在缺陷。

表1 生长多分形的全局参数和局部参数谱(典型数值)

Tab.1 Partial values of the global and local parameters of growing multifractals

矩的阶次 q	全局参数		局部参数	
	D_q	$\tau(q)$	$\alpha(q)$	$f(\alpha(q))$
$-\infty$	1.7604	$-\infty$	1.7604	0
-100	1.7429	-176.0374	1.7604	0
-2	1.6054	-4.8161	1.6153	1.5855
-1	1.6022	-3.2044	1.6081	1.5963
0	1.5995	1.5995	1.6020	1.5995
1	1.5970	0	1.5970	1.5970
2	1.5949	1.5949	1.5930	1.5910
100	1.5798	156.3975	1.5791	1.5129
∞	1.5791	∞	1.5791	0

注：加粗数字表示分形参数极限值,下同。

2 问题与探讨

2.1 三种分形的异同点

对于一般分形体,不论是简单自相似分形、自仿射分形,还是多重分形,都有3个基本的性质:标度律、分数维和熵守恒。所谓标度律(scaling law),就是分形模型一定是标度变换 T 的本征函数(eigenfunction),而分维与相应的本征值(eigenvalue)有关(陈彦光, 2008)。所谓分数维(fractional dimension),就是其 Hausdorff 维数大于拓扑维数(Mandelbrot, 1982)。如果采用盒子法及其变体测量分维,则所谓的分维是小于嵌入空间的欧氏维数。所谓熵守

恒(entropy conservation),就是给定层次,分形体的各个单元的熵值相等。标度律和分形维容易理解,下面着重解析熵守恒律。通常所谓的分形(胖分形例外),都要满足如下分维参数方程(Feder, 1988; Vicsek, 1989):

$$\sum_{i=1}^N P_i r_i^{(1-q)D_q} = 1 \quad (4)$$

式中: P_i 为第*i*个分形元的生长概率; r_i 为第*i*个分形元的线性尺寸。对于简单分形, $D_q=D_0$;对于自仿射分形,不同的方向上分维值不同,对应给定的方向,则有 $D_q=D_0$ 。一种结构是否分形,或者分维计算结果是否正确,可以用这个方程进行检验。下面以生成元为例,分别考察图1、图2和图3所示的分形是否满足这个超越方程。

(1) 自相似单分形的数理结构特征。对于图1所示的简单分形,生成元的单元数目为 $N=5$,尺度比 $r_1=r_2=\dots=r_5=1/3=r$,生成概率 $P_1=P_2=\dots=P_5=1/5=P$,分维 $D_0=D_1=\dots=\ln 5/\ln 3=\log_3 5=D_q$ 。这里只有一个标度因子 $r=1/3$ 。借助对数的换底公式,容易证明式(4)成立,即有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 P_i r_i^{(1-q)D_q} &= 5P^q r^{(1-q)D_q} = 5\left(\frac{1}{5}\right)^q \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 5/\ln 3}\right]^{1-q} \\ &= 5\left(\frac{1}{5}\right)^q \left(\frac{1}{3}\right)^{1-q} = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

可以看到,在这个式子中,参数全部消掉,广义关联维数 D_q 与矩次参数 q 无关。这类式子可以应用于任意规则的简单分形。例如,对于Koch曲线,生成元数目为 $N=4$,尺度比为 $r=1/3$,生长概率 $P=1/4$,故有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 P_i r_i^{(1-q)D_q} &= 4P^q r^{(1-q)D_q} = 4\left(\frac{1}{4}\right)^q \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 4}\right]^{1-q} \\ &= 4\left(\frac{1}{4}\right)^q \left(\frac{1}{3}\right)^{1-q} = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

实际上,即便不进行数学变换,利用任意简单、规则的自相似分形,都容易借助Excel之类的软件,开展数学实验:改变 q 值,式(4)的关系不变,该恒等式与 q 无关。既然关联维数 D_q 与矩次参数 q 无关,那就表明 $D_q=D_0$ 为一个常数。

(2) 自仿射双分形的数理结构特征。对于图2所示的自仿射分形,生成元的单元数目为 $N=7$,水平方向尺度为 $x_1=x_2=\dots=x_5=1/5=r_a$,垂直方向尺度为 $y_1=y_2=y_3=1/3=r_b$,各个点的生长概率相同,均为 $P_1=P_2=\dots=P_7=1/7=P$ 。这里有2个彼此独立的标度因

子: $r_a=1/5$ 和 $r_b=1/3$ 。水平方向分维为 $D_a=\ln 7/\ln 5=\log_5 7$,垂直方向分维为 $D_b=\ln 7/\ln 3=\log_3 7$ 。中间的点很特殊,既可以划分水平方向,也可以划归垂直方向。如果划归水平方向,则有 $x_3=y_2=1/5$;否则,则为 $x_3=y_2=1/3$ 。两种结果最终等价。不妨假定中间的点划归垂直方向,则水平方向4个点,垂直方向3个点,于是,可以证明式(4)成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 P_i r_i^{(1-q)D_q} &= 4P^q r_a^{(1-q)D_a} + 3P^q r_b^{(1-q)D_b} \\ &= 4\left(\frac{1}{7}\right)^q \left(\frac{1}{5}\right)^{1-q} + 3\left(\frac{1}{7}\right)^q \left(\frac{1}{3}\right)^{1-q} = 7\left(\frac{1}{7}\right)^q \left(\frac{1}{7}\right)^{1-q} = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

不难看出,在上式中,参数最后也是全部消掉,广义关联维数 D_q 与矩次参数 q 没有关系。由此可见,对于自仿射分形,分维仅仅与不同扩展方向的标度因子 r_a 、 r_b 有关,而与矩次 q 无关, D_q 相对于 q 是两个常数1.2091和1.7712。

(3) 复杂多分形的数理结构特征。对于图3所示的多分形,生成元的单元数目为 $N=5$,点数为17。中心尺度为 $x_1=1/5=r_c$,生长概率为 $P_c=1/17$,周边四个单元的尺度为 $y_1=y_2=y_3=y_4=2/5=r_p$,生长概率为 $P_1=P_2=P_3=P_4=4/17=P_p$ 。这里有两个彼此关联的标度因子: $r_c=1/5$ 和 $r_p=2/5$ 。广义维数为 $D_{+\infty}$ 到 $D_{-\infty}$ 之间的数值。于是,可以证明式(4)成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 P_i r_i^{(1-q)D_q} &= P_c^q r_c^{(1-q)D_q} + 4P_p^q r_p^{(1-q)D_q} \\ &= \left(\frac{1}{17}\right)^q \left(\frac{1}{5}\right)^{(1-q)D_q} + 4\left(\frac{4}{17}\right)^q \left(\frac{2}{5}\right)^{(1-q)D_q} = 1 \end{aligned} \quad (8)$$

在这个方程中,参数 q 和 D_q 不再能够消掉,广义关联维数 D_q 依赖于矩次 q 。当 $q=0$ 时,得到容量维的表达式:

$$\sum_{i=1}^5 P_i r_i^{D_0} = \left(\frac{1}{5}\right)^{D_0} + 4\left(\frac{2}{5}\right)^{D_0} = 1 \quad (9)$$

求解这个超越方程得到容量维 $D_0 \approx 1.5995$ 。当 $q=1$ 时,对应于信息维,上述关系显然成立:

$$\sum_{i=1}^5 P_i r_i^0 = \frac{1}{17} + 4 \times \frac{4}{17} = 1 \quad (10)$$

可见,此时信息维与超越方程无关。信息维的计算公式和结果为

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{-\sum_{i=1}^5 P_i \ln P_i}{\sum_{i=1}^5 P_i \ln(1/r_i)} = \frac{\left(\frac{1}{17}\right) \ln\left(\frac{1}{17}\right) + 4\left(\frac{4}{17}\right) \ln\left(\frac{4}{17}\right)}{\left(\frac{1}{17}\right) \ln\left(\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{17}\right) \ln\left(\frac{2}{5}\right)} \\ &\approx 1.5970 \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)中,分子为Shannon信息熵,分母为尺度比倒数的对数值加权。当 $q=2$ 时,得到关联维的表达式

$$\sum_{i=1}^5 P_i^2 r_i^{-D_q} = P_c^2 r_c^{-D_2} + 4P_p^2 r_p^{-D_2} \quad (12)$$

$$= \left(\frac{1}{17}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^{-D_2} + 4\left(\frac{4}{17}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^{-D_2} = 1$$

求解这个超越方程得到关联维 $D_2 \approx 1.5949$ 。可见, $D_0 > D_1 > D_2$ 。改变矩次 q , 得到不同的广义关联维数, 相应地有不同的局部分维 $f(\alpha)$ (表1)。

(4) 多分形与自仿射分形的比较。上述多分形和自仿射分形都有两个标度因子, 或者叫做两个标度率, 但结构迥然不同。二者的相似性和差异性在哪里? 首先看相似性。容易验证, 该多分形隐含着的双标度性质在形式上与自仿射分形的双标度特征相似。由图3可知, 中心单元对应于分维 $D_c = D_\infty$, 周边4个单元对应于分维 $D_p = D_{-\infty}$ 。于是

$$\sum_{i=1}^5 P_i^q r_i^{(1-q)D_q} = P_c^q r_c^{(1-q)D_c} + 4P_p^q r_p^{(1-q)D_p}$$

$$= \left(\frac{1}{17}\right)^q \left(\frac{1}{5}\right)^{(1-q)D_\infty} + 4\left(\frac{4}{17}\right)^q \left(\frac{2}{5}\right)^{(1-q)D_{-\infty}}$$

$$= \left(\frac{1}{17}\right)^q \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{(1/5)}(1/17)}\right]^{(1-q)} + 4\left(\frac{4}{17}\right)^q \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{(2/5)}(4/17)}\right]^{(1-q)} \quad (13)$$

$$= \left(\frac{1}{17}\right)^q \left(\frac{1}{17}\right)^{(1-q)} + 4\left(\frac{4}{17}\right)^q \left(\frac{4}{17}\right)^{(1-q)} = 1$$

容易看出, 式(13)与式(7)的表达相似。中心单元与周边四个单元分别表现不同的标度因子, 在极端条件下, 不同区域的标度变换形式上类似仿射性质。

对于自仿射分形, 不同的方向、层次或者区域, 各给定一个分形参数就够了。两个方向只需要两个分维数。多分形就不同了。多分形的描述不是凭借一个两个参数, 而是依靠一系列的参数集合, 它们在坐标图中形成不同类型的谱线。其一, 多分形的广义关联维数随矩次变化的曲线是一条反S形的单调递减曲线(当矩次趋近 $+\infty$ 、 $-\infty$ 时维数达到下限和上限); 其二, 质量指数是随矩次而上升的两条倾斜的折线, 两条线的斜率之差反映分形体的空间异质性程度; 其三, 奇异性指数是质量指数相对于矩次 q 的微分, 该指数随矩次变化是形似广义关联维数但变化相对而言更为陡峭的反S形曲线; 其四, 局部分维随矩次变化则是中间高两边低的双向衰减曲线(最大值等于容量维数); 其五, 局部分维随奇异性指数的变化则是一条中央凸起的单峰曲线。对于简单自相似分形, 广义关联维数、奇异性指数和局部分维彼此相等, 并且不随矩次而改变, 即有 $D_q = \alpha(q) = f(\alpha) = D_0$; 质量指数则是一条斜率等于广义关联维数从而等于奇异性指数和局部关联维数的直线, 即有 $\tau(q) = D_0(q-1)$ 。所以, 简单自相似分形的

谱线特征如下: 其一, 单分形的广义关联维数随矩次变化是一条水平直线; 其二, 质量指数是随矩次而上升的斜线——斜率给出广义关联维数、局部分维和奇异性指数; 其三, 奇异性指数、局部分维随矩次变化也是水平直线, 并且与广义关联维数的直线相同(三者重合); 其四, 局部分维随奇异性指数的变化是一个固定的点(不动点)。至于自仿射分形, 不同方向分维不同, 但对于任何一个给定的方向, 其分形参数变化特征与简单自相似分形的维数变化特征一样。

2.2 分形演化机理和区位空间效应

理论上的分形具有无穷层次, 不同层次之间形成标度对称关系。分形系统的本质是一种递阶结构的等级体系(Frankhauser, 1998), 这种等级体系联系着复杂的网络结构, 并且暗示地理系统的空间循环细分(Batty et al, 1994; Goodchild et al, 1987)。虽然分形特征表现为幂律关系, 但基于自相似等级体系可以将一个幂律分解为一对指数律(陈彦光, 2008)。这种指数律可以借助最大熵原理推导出来(Chen, 2012a)。这暗示, 分形系统演化的动力学源泉可以从熵最大化的角度得到理解。复杂社会经济系统的熵最大化不同于热力学熵增(Batty, 2010; Wilson, 2000, 2010)。熵最大化的本质是寻求个体(如单个城市)间的公平与整体(如城市体系)效率之间的一种平衡与协调状态(Chen, 2015)。单一的地理最大熵过程不会导致无尺度的分形, 只能导致有尺度的负指数分布。但是, 两个对偶的、可以相互匹配和制衡的最大熵过程(如城市频率分布最大熵和城市素规模分布最大熵)却会激发幂律分布, 从而涌现出分形结构(Chen, 2012a; Chen, 2015)。可见, 分形演化的机理在于, 对立统一的熵最大化过程通过自组织演化趋近复杂系统的结构优化。分形的等级结构具有树状特征(Batty et al, 1994; Mandelbrot, 1982)。近年 Wang 等(2012)学者提出城市演化树的概念和分析技术, 并将其用于城市生长预测。分形城市思想可望与城市演化树分析结合起来, 发展新的城市解释理论和预测方法, 二者的连接点在于树的递阶结构和空间发育的集群状态。分维可为城市演化树提供定量描述测度, 而城市演化树可为分形城市理论提供实用的可视化技术。

分维的定义有两种等价方式, 分别基于两种函数。其一是熵函数, 计算公式表现为对数函数; 其二是关联函数, 计算公式表现为幂指数函数。基于关联函数的分维公式, 可以与空间自相关建立联

系,因为 Moran 指数之类的公式,本质上是广义的关联函数。另一方面,在基于空间数据的地理分析中,区位具有重要的作用。虽然区位本身是一个定性地理学的概念,但区位之间的联系却是定量地理学的思想(Couclelis, 1997)。区位导致地理学的两种空间效应:空间依存性和空间异质性(Anselin, 1996; Goodchild, 2004)。空间依存性(spatial dependence)源于地理学第一定律(Tobler, 2004),与空间自相关分析有关(Anselin, 1996)。在空间自相关分析中,如果采用适当的阶梯函数构建空间权重矩阵,就可以建立 Moran 指数与关联维数的联系,从而将空间关联维数分析与空间自相关分析集成一个相辅相成的逻辑框架。关联维数属于广义分形参数之一,在地理空间分析中具有潜在的用途和广泛的开拓前景。空间异质性(spatial heterogeneity)源于区位的独特性,联系着地理学的核心概念——空间差异或区域差异(Anselin, 1996)。空间异质性是近年来地理学讨论较多的概念,这可能与著名地理学家 Harvey 将其推荐为地理学第二定律的候选者有关(引自 Tobler, 2004)。很多学者将分形与空间异质性联系起来,但却引起一些歧义和误解。空间异质性涉及两个层次:一是区域空间(对应于分形的嵌入空间),二是地理系统(对应于分形体)。如果一个城市是单分形结构,则城市形态是同质性的,因为不同局部的分维是一样的,但整个研究区域的空间却是异质性的,因为分维 D 不等于欧氏空间维数 $d=2$; 如果一个城市是多分形结构,则区域空间和城市形态都是异质性的,因为不同部分的分维不同,整个研究区域空间维数也不是 2。科学家早就发现,多分形标度是描述空间异质性的强有力工具之一(Stanley et al, 1988)。需要特别注意的是自仿射分形结构。一方面,不同方向的异质性会导致自仿射结构,这个问题容易理解,因为一个城市通常有自己主要的经济联系方向(周一星, 1998); 另一方面,不同层次的异质性也会导致自仿射结构,如城区与郊区的结构性差异,地级城市系统与县级城市系统的结构性差异,都属于层次异质性问题,这种异质性会反映在分形的标度关系方面。

2.3 有关分形的概念混淆与澄清

目前,在文献中,关于自仿射分形存在两个突出的误会。第一,自仿射记录维数与自相似轨迹维数存在混淆。由于无意中混淆概念的是一些著名学者(Goodchild, 1980; Goodchild et al, 1987),其误

导作用就非常显著了。如果一个系统演化具有布朗运动(Brownian motion)或者分数布朗运动(fractional Brownian motion, fBm)的随机性,则可以利用谱分析(spectral analysis)或者 R/S 分析等方法估计一个自仿射记录维数(self-affine record dimension)(Feder, 1988)。当这个维数值为 1.5 时,相应的 Hurst 指数为 0.5,这暗示一种布朗运动(Hurst et al, 1965)。对于这类运动,系统变化率前后不相关,即演变过程没有记忆。这是一个很随机的、无法预测过程。股市涨落的曲线就属于这种过程。有学者由此联想到,这是一个不稳定的过程,基于这种思想定义了一个不稳定指数。目前在城市形态、生态学的斑块分布等研究中,常用到这个不稳定指数。人们首先基于城市或者生态斑块的面积-周长标度关系估计边长的维数,如果这个维数值接近于 1.5,就被认为系统不稳定。可是,这个判断的背后有三个误会。其一,基于面积-周长标度估计的维数是一种自相似轨迹维数(self-similar trail dimension)(Feder, 1988),其数值等于 1.5,与系统稳定与否没有关系。之所以形成上述错误结论,是因为人们将自相似轨迹维数与前述自仿射记录维数混淆了。其二,即便自仿射记录维数等于 1.5,也没有足够的证据表明系统一定不稳定。其三,利用面积-周长标度关系估计分维值,目前技术不成熟。人们估计的结果通常只是一种标度指数,代表两个维数的比率,不是严格意义的斑块分形线的维数值(Cheng, 1995; Imre 等, 2004; Benguigui et al, 2006; Chen, 2011)。第二,自仿射分形与双分形的关系没有澄清。而且,双分形概念引起了更多的误会。对于理论意义的数学分形,如果采用恰到好处的方式进行测量,则在双对数坐标图,尺度(如长度)-测度(面积、数目等)之间的标度关系表现为一条直线。对于现实中的类似分形的物体如城市,测量结果在双对数坐标图上表现为一个显著的直线区段:尺度太小或者太大都表现为曲线,中间一段为直线,叫做标度区(scaling range)。可是,有时候,在双对数坐标图上,尺度与测度关系表现为两个直线段,人们称此种现象为“双分形”,不同的直线段的斜率给出不同的分维值。不过,这里可能存在较大的误会,因为这违背了维数一致性公理。对于一个几何体,在给定的方面,它的维数是唯一的,不可能同时存在两个以上的维数。双分形的本质可能在于自仿射分形。如果采用面积-半径标度对图 2 所示的自

仿射分形,将会在双对数坐标图中得到一个双标度图式,即两个直线段,与人们通常所谓的双分形一样。各向异性是双分形的根源之一,主要影响因素有三:其一,不同方向生长概率不同,从而标度率不同(各向异性);其二,不同层次生长概率不同,从而标度率不同(各层异性);其三,不同区域生长概率不同,从而标度率不同(各区分异性)。更糟糕的是,有人据此联想,如果尺度-测度双对数坐标图给出了一条曲线,岂不意味着多分形吗?实际上,如果尺度-测度关系在双对数坐标图上表现为曲线趋势,那就表明不存在分维关系。

3 双标度多分形模型举例

3.1 城市位序-规模分布与分形

模型是科学认识世界的一种方式,而对于同一种事物,人们可以建造不同的模型。模型一般没有对错之别,但有好坏之分。到目前为止,城市地理学中至少形成三个有影响的规律:距离衰减律(基于引力模型)、位序-规模律(基于 Zipf 法则)和异速生长律(源于规模-形状关系)。这三个规律代表地理学的三个基本模型,并且都与标度、分形等概念有关(陈彦光, 2008)。位序-规模法则和中心地理论都是地理学家认识城市等级体系的模型,二者存在逻辑关系,但视角不同:前者是一种行为模型,后者是一种规范模型。现以位序-规模律为例,说明多分形建模的思路。如果一个区域中的一组城市集合的某种规模测度(如人口数量)从大到小排序,规模 $S(r)$ 与相应的位序 r 之间服从或者局部服从负幂律:

$$S(r) = S_1 r^{-\sigma} \quad (14)$$

就可认为这个城市等级体系服从 Zipf 定律,式中参数 S_1 在理论上为最大城市的规模, σ 为标度指数。上面这个式子在数学上等价于 Pareto 分布,而 Pareto 分布可以等价地表示为:

$$N(s) = N_1 s^{-D} \quad (15)$$

这是一个简单分形模型,式中: s 为人口规模尺度(例如可以取 $s=1600, 800, 400, 200, 100, 50, 25, 12.5, 6.25, 3.125$ 等等); $N(s)$ 为规模大于等于 s 的城市数目; N_1 为比例系数; D 常被视为城市规模分布的分维(陈勇等, 1993)。可以证明, $D=1/\sigma$, 即城市规模分布的分维与 Zipf 定律的标度指数互为倒数。因此,也有人将 Zipf 标度指数 σ 也看成是一个分维

数。理论上可以证明, Zipf 定律等价于 Davis 二倍数法则(Chen et al, 2003; Chen, 2012b; Chen, 2016)。在理想的情况下,可以根据二倍数法则将服从 Zipf 定律的城市组织为一个具有递阶结构的等级体系:第一级 $f_1=1$ 个城市,平均规模为 S_1 ;第二级 $f_2=2$ 个城市,平均规模为 S_2 ;...;第 m 级 $f_m=2^{m-1}$ 个城市,平均规模为 S_m 。这里数目比为 $r_j=f_{m+1}/f_m=2$ 。如果 $D=1/\sigma \approx 1$, 则规模比 $r_s=S_m/S_{m+1} \rightarrow 2$, 即渐近于 2。于是城市规模分布的相似维数约为 $D=\ln(r_j)/\ln(r_s) \approx 1$ 。

3.2 城市规模分布的多分形模型

Zipf 定律、Pareto 分布和 Davis 二倍数法则分别提供了人们认识城市等级体系的一个模型,这些模型在理论上等价或者逻辑上相关,在经验分析过程中各有自己的分析角度。然而,它们揭示的信息往往有限。真实的城市位序-规模分布可能并非只有一个标度因子的简单递阶结构,而是具有两个乃至更多的标度因子的复杂递阶结构。如果这样,则可以建立多分形城市位序-规模分布模型。假定城市等级体系自上而下按照二倍数法则一分为二、二分为四、四分为八,如此下去,直到囊括所有城市。如果第一级的 1 个城市规模为 1 单位,理想的情况下第二级的 2 个城市规模分别为 $a=p, b=1-p$, 第三级的 4 个城市规模为 aa, ab, ba, bb , 第四级的 8 个城市规模为 $aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$, 如此等等。这样可得到一个双标度的多分形递阶结构(Chen et al, 2004; Chen, 2012b)。参数 a 和 b 各代表一个标度因子,但彼此有关。质量指数可表示为:

$$\tau(q) = -\frac{\ln[p^q + (1-p)^q]}{\ln 2} \quad (16)$$

式中: q 表示矩次($-\infty < q < \infty$); $\tau(q)$ 为城市规模分布的质量指数; p 为等级结构中的人口分配概率测度。在式(16)中求 q 导数,得到 Lipschitz-Hölder 奇异性指数:

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} = -\frac{1}{\ln 2} \frac{p^q \ln p + (1-p)^q \ln(1-p)}{p^q + (1-p)^q} \quad (17)$$

式中: $\alpha(q)$ 为城市规模分布的奇异性指数。借助 Legendre 变换,可以导出支持奇异性指数的子集的局部分维:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= q\alpha(q) - \tau(q) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left[\ln[p^q + (1-p)^q] - \frac{p^q \ln p + (1-p)^q \ln(1-p)}{p^q + (1-p)^q} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

式中: $f(\alpha)$ 为城市规模多分形的局部分维。进一步

地,广义关联维数可以表示为:

$$D_q = \begin{cases} -\frac{p \ln p + (1-p) \ln(1-p)}{\ln 2}, & q=1 \\ \frac{\tau(q)}{q-1}, & q \neq 1 \end{cases} \quad (19)$$

式中: D_q 给出了广义维数谱。若矩次 $q \neq 1$,则广义关联维数可通过 Legendre 变换获取,即有

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q\alpha(q) - f(\alpha)] \quad (20)$$

给定 p 值,可以利用上面的公式计算出多分维谱和相关的参数序列。根据 Zipf 定律,在标度指数等于1的情况下,可以取

$$a=p=\frac{1/2}{1/2+1/3}=\frac{3}{5}, \quad b=1-p=\frac{1/3}{1/2+1/3}=\frac{2}{5}$$

于是极端的广义关联维数为:

$$D_{+\infty} = \frac{\ln(3/5)}{\ln(1/2)} \approx 0.7370, \quad D_{-\infty} = \frac{\ln(2/5)}{\ln(1/2)} \approx 1.3219$$

根据式(16)和式(19),容量维数为 $D_0=1$,信息维数为 $D_1 \approx 0.9710$,关联维数为 $D_2 \approx 0.9434$ 。

这是一个简单的城市多分形模型,多分维谱的计算步骤如下:第一步,取定矩次范围和数值,利用式(16)计算质量指数 $\tau(q)$;第二步,利用式(17)计算奇异性指数 $\alpha(q)$;第三步,基于质量指数和奇异性指数,利用式(18)计算局部分维;第四步,基于奇异性指数和局部分维,利用式(19)计算广义关联维数。在第三步中,局部分维可以利用式(18)直接计算;在第四步中,可以利用式(19)基于质量指数计算广义关联维数,其中 $q=1$ 时的信息维与质量指数无关,需要基于 Shannon 熵公式单独计算。部分结果如表2所示,广义关联维数和相关参数的变化图谱如图4所示,局部分维随奇异性指数而变化的单峰曲线如图5所示。根据观测数据估计参数 a 和 b 的数值,就可以将上述模型应用于现实的城市等级体系分析(Chen et al, 2004)。

4 结语

这篇文章的写作目的,不是要告诉读者如何借助分形几何学开展地理研究的实证分析,而是要帮助初涉地理分形的研究人员从城市地理学的角度区分基本的分形概念。只有准确地理解分形原理,才能更好地借助分形几何学描述城市地理系统无尺度现象。通过前述分析,可以得出如下基本结论:其一,自相似分形是自仿射分形的特例。当生

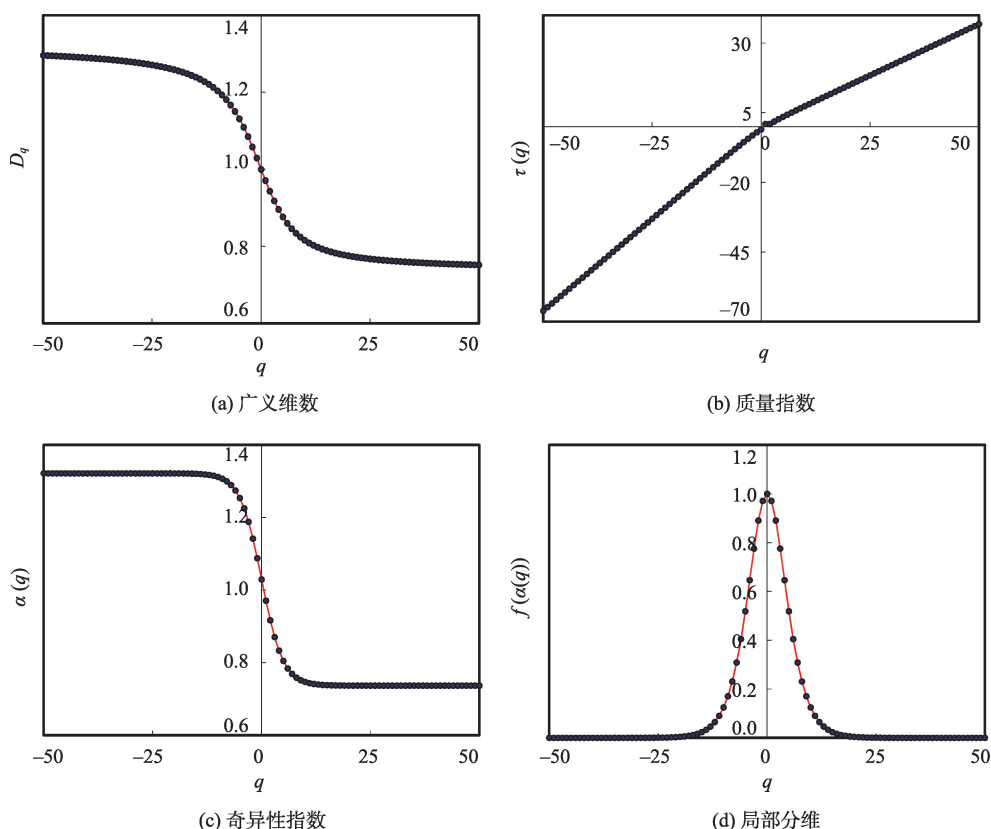
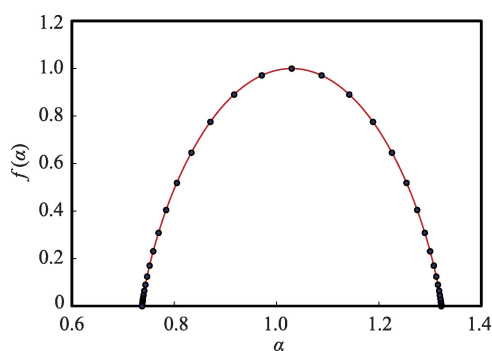
长分形各个独立方向扩散速度相等的时候,自仿射分形就变成自相似分形。其二,简单自相似分形是多分形的特例。多分形的分维随矩次参数而变化为曲线,简单分形的分维随矩次的变化为水平直线,并且广义关联维数、奇异性指数和局部分维数值相等。其三,多分形隐含着自仿射分形的特征。多分形不同尺度的生长概率在数学上对应于自仿射分形的不同扩展方向。需要特别强调的是,对于多分形,双对数坐标图给出尺度与测度的直线关系;而对于自仿射分形,则会给出两个直线段交接的折线关系。换言之,自仿射分形表现出标度间断,而标度间断不是多分形的性质。自仿射分形和多分形都可能出现双标度,但前者是显性双标度——在双对数坐标图上可以看出,后者是隐性双标度,坐标图没有体现。

现实中很少有简单自相似分形,城市地理系统中的无特征尺度分布背后通常是随机多分形,或者具有自仿射生长性质。当多分形生长与自仿射过程交织在一起的时候,分形结构就更为复杂了。在地理研究中,分形的应用方法要注意如下问题:其一,可以借助简单分形研究一个地理系统的多分形结构。简单分形的容量维是多分维谱中的一个参数值,可以利用特定的分维值分析多分形格局的基本特征。其二,判断一个地理现象是否多分形的基本方法是考察容量维和信息维。容量维和信息维是容易估计的基本参数。如果一个地理系统的容量维与信息维没有显著差异,则其为简单分形结构;如果信息维显著小于容量维,则可能是多分形

表2 城市规模分布分形的全局参数和
局部参数谱($p=0.6$,部分数值)

Tab.2 Partial values of the global and local parameters of the urban multifractals on rank-size distributions

矩的阶次 q	全局参数		局部参数	
	D_q	$\tau(q)$	$\alpha(q)$	$f(\alpha(q))$
$-\infty$	1.3219	$-\infty$	1.3219	0
-50	1.2960	-66.0964	1.3219	0
-2	1.0581	-3.1744	1.1419	0.8905
-1	1.0294	-2.0589	1.0879	0.9710
0	1.0000	-1.0000	1.0294	1.0000
1	0.9710	0.9710	0.9710	0.9710
2	0.9434	0.9434	0.9170	0.8905
50	0.7520	36.8483	0.7370	0
∞	0.7370	∞	0.7370	0

图4 城市位序-规模分布的多分维谱和相关参数谱($p=0.6$)Fig.4 Dimension spectra of multifracts rank-size distribution of cities and curves of related parameters ($p=0.6$)图5 城市位序-规模分布的奇异性指数-局部分维单峰曲线($p=0.6$)Fig.5 The $f(\alpha)$ curves of the local dimension v.s. the singularity exponent ($p=0.6$)

结构。是否多分形,还必须计算更多矩次的广义维数才能最终判定。其三,自仿射分形不宜当作自相似分形研究。地理系统如城市自仿射生长各向异性、各层异性或者各区异性,如果当作自相似分形,则可能表现所谓双分形特征,并且密度分布貌似负指数衰减而不是幂律衰减。地理世界的很多生长

现象可能是各向(层、区)异性而非同性的,从这个意义上讲,自仿射分形建模可能比自相似分形建模更具有解释能力和预测效果。

参考文献(References)

- 陈彦光. 2008. 分形城市系统: 标度、对称和空间复杂性 [M]. 北京: 科学出版社. [Chen Y G. 2008. Fractal urban systems: Scaling, symmetry, and spatial complexity. Beijing, China: Science Press.]
- 陈彦光. 2015. 简单、复杂与地理分布模型的选择 [J]. 地理科学进展, 34(3): 321-329. [Chen Y G. 2015. Simplicity, complexity, and mathematical modeling of geographical distributions. Progress in Geography, 34(3): 321-329.]
- 陈彦光. 2017. 城市形态的分维估算与分形判定 [J]. 地理科学进展, 36(5): 529-539. [Chen Y G. 2017. Approaches to estimating fractal dimension and identifying fractals of urban form. Progress in Geography, 36(5): 529-539.]
- 陈勇, 陈嵘, 艾南山, 等. 1993. 城市规模分布的分形研究 [J]. 经济地理, 13(3): 48-53. [Chen Y, Chen R, Ai N S, et al. 1993. On the fractal property of city-size distributions. Economical Geography, 13(3): 48-53.]
- 王放, 李后强. 1995. 非线性人口学导论 [M]. 成都: 四川大学

- 出版社. [Wang F, Li Q. 1995. Introduction to nonlinear demography. Chengdu, China: Sichuan University Press.]
- 周一星. 1998. 主要经济联系方向论 [J]. 城市规划, 22(2): 22-25. [Zhou Y X. 1998. Major directions of economic linkages: Some theoretical considerations. City Planning Review, 22(2): 22-25.]
- 朱晓华. 2007. 地理空间信息的分形与分维 [M]. 北京: 测绘出版社. [Zhu X H. 2007. Fractals and fractal dimensions of spatial geo-information. Beijing, China: Surveying and Mapping Press.]
- Anselin L. 1996. The moran scatterplot as an ESDA tool to assess local instability in spatial association [M]// Fischer M, Scholten H J, Unwin D. Spatial analytical perspectives on GIS. London, UK: Taylor & Francis: 111-125.
- Appleby S. 1996. Multifractal characterization of the distribution pattern of the human population [J]. Geographical Analysis, 28(2): 147-160.
- Ariza- Villaverde A B, Jimenez- Hornero F J, De Rave E G. 2013. Multifractal analysis of axial maps applied to the study of urban morphology [J]. Computers, Environment and Urban Systems, 38: 1-10.
- Batty M, Longley P A. 1994. Fractal cities: A geometry of form and function [M]. London, UK: Academic Press.
- Batty M. 2010. Space, scale, and scaling in entropy maximizing [J]. Geographical Analysis, 42(4): 395-421.
- Benguigui L, Blumenfeld- Lieberthal E, Czamanski D. 2006. The dynamics of the Tel Aviv morphology [J]. Environment and Planning B: Planning and Design, 33(2): 269-284.
- Benguigui L, Daoud M. 1991. Is the suburban railway system a fractal? [J]. Geographical Analysis, 23(4): 362-368.
- Chen Y G. 2011. Derivation of the functional relations between fractal dimension and shape indices of urban form [J]. Computers, Environment and Urban Systems, 35(6): 442-451.
- Chen Y G. 2012a. The rank-size scaling law and entropy-maximizing principle [J]. Physica A, 391(3): 767-778.
- Chen Y G. 2012b. Zipf's law, 1/f noise, and fractal hierarchy [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 45(1): 63-73.
- Chen Y G. 2015. The distance-decay function of geographical gravity model: Power law or exponential law? [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 77: 174-189.
- Chen Y G. 2016. The evolution of Zipf's law indicative of city development [J]. Physica A, 443: 555-567.
- Chen Y G, Lin J Y. 2009. Modeling the self-affine structure and optimization conditions of city systems using the idea from fractals [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 41(2): 615-629.
- Chen Y G, Wang J J. 2013. Multifractal characterization of urban form and growth: The case of Beijing [J]. Environment and Planning B: Planning and Design, 40(5): 884-904.
- Chen Y G, Zhou Y X. 2003. The rank-size rule and fractal hierarchies of cities: Mathematical models and empirical analyses [J]. Environment and Planning B: Planning and Design, 30(6): 799-818.
- Chen Y G, Zhou Y X. 2004. Multi-fractal measures of city-size distributions based on the three-parameter Zipf model [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 22(4): 793-805.
- Cheng Q. 1995. The perimeter-area fractal model and its application in geology [J]. Mathematical Geology, 27(1): 69-82.
- Couclelis H. 1997. From cellular automata to urban models: New principles for model development and implementation [J]. Environment and Planning B: Planning and Design, 24(2): 165-174.
- Feder J. 1988. Fractals [M]. New York: Plenum Press, 1988.
- Frankhauser P. 1994. The fractal aspects of urban structures [M]. Paris, French: Economica.
- Frankhauser P. 1998. The fractal approach: A new tool for the spatial analysis of urban agglomerations [J]. Population: An English Selection, 10(1): 205-240.
- Goodchild M F, Mark D M. 1987. The fractal nature of geographical phenomena [J]. Annals of Association of American Geographers, 77(2): 265-278.
- Goodchild M F. 1980. Fractals and the accuracy of geographical measures [J]. Mathematical Geology, 12(2): 85-98.
- Goodchild M F. 2004. GIScience, geography, form, and process [J]. Annals of the Association of American Geographers, 94(4): 709-714.
- Grassberger P. 1983. Generalized dimensions of strange attractors [J]. Physics Letters A, 97(6): 227-230.
- Halsey T C, Jensen M H, Kadanoff L P, et al. 1986. Fractal measure and their singularities: The characterization of strange sets [J]. Physical Review A, 33: 1141-1151.
- Hentschel H E, Procaccia I. 1983. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 8: 435-444.
- Hurst H E, Black R P, Simaika Y M. 1965. Long-term storage: An experimental study [M]. London, UK: Constable.
- Imre A R, Bogaert J. 2004. The fractal dimension as a measure of the quality of habitat [J]. Acta Biotheoretica, 52(1): 41-56.
- Jullien R, Botet R. 1987. Aggregation and fractal aggregates [M]. Singapore: World Scientific Publishing.
- Lam N S-N, De Cola L. 1993. Fractals in geography [M]. Englewood Cliffs, NJ: PTR Prentice Hall.

- Longley P A, Batty M, Shepherd J. 1991. The size, shape and dimension of urban settlements [J]. *Transactions of the Institute of British Geographers*, 16(1): 75-94.
- Mandelbrot B B. 1982. *The fractal geometry of nature* [M]. New York, USA: W. H. Freeman and Company.
- Murcio R, Masucci A P, Arcaute E et al. 2015. Multifractal to monofractal evolution of the London street network [J]. *Physical Review E*, 92: 062130. doi: 10.1103/PhysRevE.92.062130.
- Stanley H E, Meakin P. 1988. Multifractal phenomena in physics and chemistry [J]. *Nature*, 335: 405-409.
- Tobler W. 2004. On the first law of geography: A reply [J]. *Annals of the Association of American Geographers*, 94(2): 304-310.
- Vicsek T. 1989. *Fractal growth phenomena* [M]. Singapore: World Scientific Publishing.
- Wang J F, Liu X H, Peng L, et al. 2012. Cities evolution tree and applications to predicting urban growth [J]. *Population & Environment*, 33(2-3): 186-201.
- White R, Engelen G. 1993. Cellular automata and fractal urban form: A cellular modeling approach to the evolution of urban land-use patterns [J]. *Environment and Planning A*, 25(8): 1175-1199.
- White R, Engelen G. 1994. Urban systems dynamics and cellular automata: Fractal structures between order and chaos [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 4(4): 563-583.
- Wilson A G. 2000. *Complex spatial systems: The modelling foundations of urban and regional analysis* [M]. Singapore: Pearson Education.
- Wilson A G. 2010. Entropy in urban and regional modelling: Retrospect and prospect [J]. *Geographical Analysis*, 42(4): 364-394.

Monofractal, multifractals, and self-affine fractals in urban studies

CHEN Yanguang

(Department of Urban and Economic Geography, College of Urban and Environmental Sciences,
Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Fractal geometry provides a powerful tool for scale-free spatial modeling and analyses in geography. However, a number of basic concepts are puzzling. The three common fractals, that is, monofractal (unifractal), multifractals, and self-affine fractal, are often misunderstood by students of geography. This article clarifies some confusing fractal concepts for urban fractal modeling and fractal dimension analysis. Using simple mathematical models based on three growing fractals that bear an analogy to urban growth, we can distinguish the three types of common fractal structure. The similarities and differences between monofractal, multifractals, and self-affine fractal are as follows: 1) A monofractal is a simple self-similar fractal that bears only one scaling factor (scaling ratio), and a multifractal object is a complex fractal system that bears at least two scaling factors for different parts. Each scaling factor dominates all different scales and is independent of directions and levels. 2) A self-affine fractal bears different scaling factors in different directions of growth or at different levels of scales. The basic feature of self-affine growing fractal is anisotropy, which differs from the isotropic self-similar growing fractals. 3) Both self-affine fractal and multifractals may possess two scaling factors, but there are essential differences between self-affine fractals and multifractals. A self-affine fractal often takes on the form of bi-fractals, which can be reflected by two scaling ranges on a log-log plot. However, there is only one scaling range for a multifractal pattern. As an example, two-scaling fractal modeling is applied to the rank-size distributions of cities to illustrate the concept of urban multifractals. By comparison with these multifractal models, we can better understand monofractals and self-affine fractals in geographical research.

Keywords: geographical fractals; monofractal (unifractal); bi-fractals; multifractals; self-affine fractal; multifractal dimension spectrum; fractal cities