一个比随机更离散的混合概率法则

——结合区域差异性的研究

M.F.达西

描述和解释城市及市镇的地域分布，是地理学研讨城市体系的一个基本课题。本文讨论一个有助于描述城市和市镇的地域分布的概率法则。这个概率法则是对服从于下列条件的区域中的位置而推导的，（1）定位过程产生的区位在整个区域中均匀分布；（2）定位过程的参数在整个区域中取不同的值。

诚然地理学感兴趣的许多现象能满足这两个条件，但是城市和市镇的分布对于应用这个概率法则却是一个特别适宜的类型。例如，中地学说提出的相同条件的肥沃平原，其服务中心在空间的分布是很有规则的（六角形的格子网点）。此外，许多中心地方研究的实践证明，在接近于均质条件（如土壤肥力、人口密度）的地域中城市及市镇的分布、间距也比较的均匀。

笔者于不久前发表的论文中，曾专门论述了适用于描述城市和市镇在均质性地域中的分布概率法则。所谓同一性区域是由假定的区域内条件完全相同的各个小的级别的地区（县）组合而成。这个假定条件允许把概率法则的各个参数定为常量来推导它。下面研究表明，这一基本的概率法则将能够运用于研究处理条件不同的非均质性，地域的分布问题，从而使它的用途更为广泛。

不言而喻，包含有大城市系统的均质性区域是难以找到的，但是通过在模式中引入条件（2），对于不能满足相同条件肥沃平原假设的普通的区域，来进行区位分布的研究，仍然具有可能性。第二个条件就是说不论区域多大或是多么复杂，经过挑选，如按人口密度的不同水平，将整体区域细分为若干亚区而求得均质性。本文选取的区域，是美国中西部地区的六个州（表1），和美国大陆部分（表2）。用概率法则描述这两个地区的城市和市镇分布，效果是良好的。在详述模式前，先来探讨有关描述点型的研究方法。

地图分析法 在地图上，想要得到点型或点号的定量描述，通常是采用两种类型的测度：一种方法是用相邻点间的距

人口普查局在其调查中使用某些遥感技术是很有可能的（在发展中国家里已有类似的应用。）这些技术被恰如其分地看成是取得准确人口信息的必要工具之一。也许它们并未得到充分的使用（布鲁金尼先生关于在一个城市中的示范项目就是一个非常出色的建议），但是，它们有它们的地位。不过，如果我们象作者那样建议用遥感代替目前人口普查，那对就那种调查及其结果和用途看得过分随便了。

林珲译自《Photogrammatric Engineering and Remote Sensing》，1984，Vol.50，No2

甘国辉校

表1　美国伊阿华州、密里苏州、堪萨斯州*、内布拉斯加州、堪萨斯州、怀俄明州和科罗拉多州等组成的区域中，镇城位置在县中的数量与频数分布表

每个县的区位数	观测出现次数	计　　算	数　　频
		p (x)	π (x)
0……	221	254	222
1……	222	176	217
2……	40	61	47
3……	12	13	9
4……	2	2	2
≥5……	0	0	0

资料来源。美国1950年人口调查，载"城市居民篇"第1卷，1952年。计算频数由方程（3）和（7）计算而得，参数采用动态法加以估计。*密苏里州斯特·路易斯县中的24个市镇的位置没有列入。

表2　美国全国10%的样本县及类似的行政区内，城市区位数的频数分布(1950年)（大都市地区的县除外）

每个县的区位数	观测出现次数	计　　算	频　　数
		p (x)	π (x)
0	101	107	101
1	123	107	121
2	40	52	45
3	16	16	14
4	6		4
5	1	1	1
≥6	*	0	1

说明：实际资料引自1950年美国人口调查。第1卷居民统计，1952年版。计算出现次数由方程（2）和（7）求得，方程（8）的参数是用动态法估计的。方程（7）的参数，是从零次，一次，二次，阶乘矩的比例估算的。*样本中的三个县有七个区位，这些值不用于参数估计。

离；另一种方法是用在较小的区域取样单元（一般是矩形）内的点子的数量。本文使用的是描述性测度，它属于一般的用来进行生态或人口调查矩形取样的范畴，但是以美国最基本的行政单位县来代表矩形样本单元。

人口普查中的取样矩形是指相对于研究区域而言，在尺度上较小的区域单元。根据抽样调查方法，样本单元以随机的、系统的、或分层取样的方法配置在研究区域内。按层次地数出每个象限的点子数目，编制一个表或频率分布表，列出没有点的矩形数，有一个点的矩形数、有二个点的矩形数……，按需要依次类推，直到满足计算本为止。这个频率分布就是点型的一个计量的简略描述。

可以利用离散概率法则，推导出给定象限中点子分布的理论频率。最流行的离散概率法则就是从类型过程中导出的。但是离散型概率法则，对于类型表现区域的均匀性或规则性並没引起数理统计学家的重视。笔者认为依条件（1）导出的分布是比随机更加均匀的一种类型的概率法则。由于同类性的假设条件（或常量参数的值）未得到满足，故本文就来弥补其不足。之所以称为新的概率法则，是因为它更适合于地理学者对各种的地域分布的研究。

基本的概率法则 在下面将提到数学的模式，是根据城市、城镇和县而推导出的概率公式。形式上等价于以条件（1）的推导结果。在这个特殊的公式中，模式涉及到一个州或区域中，区位和县的划分。概率法则的基本假设条件关系到县城城址的位置和其它城址区位之间的差异。确定这个差异，是因为希望县内的县城位置和其它城址位置的分布服从于不同过程是合理的。对于任何一组N个位置，一个县最多能够包括一个县城城址的位置。但也可以包括一个以上的非县城城址的位置。以下的模式就是基于这个事实，以及假定县中的区位来排列的。

考虑从一个州或一个小区中N个区位的聚集，设Z表示样本中县城城址位置的数量，那么非县城城址区位的数量则为（N—Z）。将州划分为面积近似相等的C个同类型性的县，並假定区位在这些县中随机分布。为了澄清县址位置和其它区位之间的差别，随机性的假定条件导改了以下两个条件：

A—I 每个县得到一个县址位置的概率都相等，但一个县最多只能包含一个县址位置，即抽样没有替换。

A—2 是每个县得到一个非县址位置的概率都相等，即抽样是可以替换的。

于是，A—I条件，一个县得到y个县址的概率为：

$$(1)\begin{cases} P(Y=O)=1—Z/C, \\ P(Y=1)=Z/C, \\ P(Y\neq 0.1)=O。\end{cases}$$

一个县得到y'个非县址位置的概率，由二项式分布给出。假定县址的数量很大，就可采用逼近于二项式分布的泊松分布，故得

$$(2)\quad P(Y'-y)=\left(\frac{N—z}{C}\right)^{y} \exp\left\{-\frac{N—z}{e}\right\}\Big/ y!,\quad y=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots=O。$$

继这两个概率之后，如条件（1）所示，一个县得到X个区位的概率为：

$$(3)\ P(X=y+y')=P(x) = (1—P)\,e^{-m}\,m^{x}/x! + pe^{-m}\,m^{x-1}/(x—1)!,\ x=0,\ 1,\ \cdots\cdots$$

式中$P=Z/C$，$m=(N—Z)/C$，在以

下的讨论中，还会引用公式（3）的简化符号。

概率法则的参数可以给予地理学和统计的解释。参数的地理解释依赖于研究对象的性质，而统计解释对于现象的特征则是不变的，所以将首先讨论统计解释。

参数P表示不同随机排列中趋向于均匀排列的偏差的一种测度。对于$P=0$，给县址的位置的分配是完全随机的，所以P（x）是参数为m的简单泊松概率法则。当P从零增到1时，概率法则对于县址得到一个位置，就会产生一个偏离随机性的偏差。这个偏差由抽样没有替换引起。所以在随机排列中，就会发生更多的县得到一个位置。对于$P=1$，每个县从第一个样本中得到一个位置。剩下的位置随机地分配给各县。P（x）是泊松变量加上1。

P（x）的实际解释依赖于赋予变量的某些任意内容。对于已建立的模式，以下的解释是合理的。参数m表示在每个县中非县城址位置的平均数量。而参数P则表示在每个县中县城址位置的平均数量。根据模式解释这些值，P显然是一个县城址为城市位置的概率。m是说明非县城址位置在县中分布的泊松概率法则的参数。

非均质性区域的延伸　P（x）的推导。假定，得到县城址位置和其它位置的概率对于所有的县来说是常量，这些假定条件对于一个州或一个小的均质性区域可能是适用的，常量参数值的假定对于大的区域一般是不适宜的，在下面的推导中，参数P和m允许变化，虽然变化类型只作一些简单的假定。

参数m是非县城址位置的平均数的一个测度，对于一个在人口密度方面只有小量变化的相对的同一性经济区域，位置的期望值，对于土地面积近乎相等的县是相同的，这一假设是合理的。然而在缺乏经济均质性、而且人口密度变化很大的一个区域里，这个假定就不可能成立和接受。这样，县的大小的变化就必须在计算中估计到，因此若考虑的是一个延伸区域的中县。期望参数m从很小的值（对于人烟稀少的区内的小县而言，它接近于零）变化到很大的值（对于人口稠密的大都市地区内的大县而言）是合理的。关于m的变化，可作很多假定，一个简单而又实用的假定，是m为随机地分布并且是具有r函数的概率分布。当发展完善的理论不能得到时，这还是一个常用到的简单的假定。使用r函数的一个原因，就是这个概率法则所确定的密度函数的变化甚大。应用r分布的假定以后，m的概率密度数为：

（4）$f(m)=m^{r-1}e^{-m/\beta}\beta^{r}/(r-1)!$

$m,\ r,\ \beta>0$

参数P值，表示县城址是城市位置的概率。P值限制在0至1的范围内。对于一个相当大的、完全不相同的区域，可以期望P取（0，1）范围内的较大数值。由于β分布形式的多样性，故考虑假设P是一个β变量乃是合理的，于是，采用这个假定后，P的概率密度函数为：

（5）$f(p)=P^{s-1}(1-P)^{r-1}/B)r,s),$

$0\leq p<1$

$s,\ r>0$

其中B（r，s）是β函数。

令π（x）表示当m分布是一个r变量，p分布是β变量时，一个县包含x个位置的概率。这个概率通过求p（x），f（m）和f（p）之积对m和p的积分而得到，积分的排列次序是任意的，这样，笔者求得：

（6）$\pi(x)=\int_0^1\int_0^\infty p(x)f(p)f(m)dpdm$

$=[\beta^{r}x!(r-1)!B(r,s)]^{-1}\times$

$\Big[\int_0^1\int_0^\infty(1-q)^{s-1}q^{r-1}$

$$m^{x+r-1}e^{-m(1+\beta-1)}\,dqdm$$

$$+\int_0^1\int_0^\infty p^{s-1}(1-p)^{r-1}\,m^{x+r-z}$$

$$e^{-m}\ (1+\beta^{-1})\ dpdm\Big]$$

$$=\frac{r}{r+s}\ \frac{(r+x-1)!}{x!(r-1)!}\left(\frac{1}{\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{r+x}$$

$$+\frac{s}{r+s}\ \frac{(r+x-z)!}{(x-1)!(r-1)!}\left(\frac{1}{\beta}\right)^r$$

$$\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{r+x-1}$$

其中$q=1-p$，令$r=k$，$B=u/v=(1-v)/v$，$S=s/(r+s)$和$R=1-S$。

把这些值代入(6)得：

$$(7)\ \pi(x)=R\frac{(k+x-1)!}{x!(k-1)!}V^k(1-v)^x+$$

$$S\frac{(k+x-z)!}{(x-1)!(k-1)!}V^k(1-v)^{x-1}$$

即，$\pi(x)=Rf(x;K,v)+sf(x-1;K,v)$
其中，$f(x;K,v)$是带有参数K和V的负二项式分布。

实际上，通过把$\pi(x)$与负二项式分布联系起来，可以发现变化的动态，在带有幂级数分布的共同部分中，阶乘矩表示动态特征是很方便的。Z次阶乘矩为：

$$(8)\ V_{(z)}=\left(\frac{u}{v}\right)^z K(K+1)\cdots\cdots$$

$$(K+Z-1)+Sz\left(\frac{u}{v}\right)^{z-1}K(K+1)\cdots(K+Z-2),$$

变化系数是：$\dfrac{QK(1+Q)+S(1-S)}{QK+S}$

其中$Q=\dfrac{u}{v}$。比较各项知道，变化系数可以小于、等于或大于1。基本分布p(x)的变化系数总是小于1。

参数估计　对于参数估计，采用由K，V，和S确定的三个参数分布，而不是采用以r和s代替S而得到的四参数分布。参数估计通过采用动态方法求得。设$m'z$表示Z阶乘矩的经验估计，估计方程为：

$$\hat{S}\Big[m'_3+m'_2+m^1_1+2m^1_1\left(m'_1-\hat{S}\right)$$

$$\left(m'_1-2m'_2\Big/m'_1-\hat{S}\right)\Big]$$

$$=m^1_3m^1_1+m^1_2\left(m^2_1-2m^1_3\right),$$

$$\hat{V}=\left(m^1_1-\hat{S}\Big/\left\{m^1_2+\left(m^1_1-\hat{S}\right)\left(1-m'_1-\hat{S}\right)\right\}\right.,$$

$$\hat{K}=\hat{V}\left(m^1_1-\hat{S}\right)\Big/\left(1-\hat{V}\right)。$$

$\hat{S}$值用迭代解得。

为了得到阶乘矩的样本估计，简便方法是从样本中计算概略的矩值，以mz表示，用下列关系来求阶乘矩。

$$m'_1=m_1,\ m'_2=m_2-m_1,\ m'_3=$$

$$m_3-3m_2+2m_1,$$

从最大似然方程或前两次阶矩与零次阶矩比率中，估计参数是困难的。然而，相信动态方法的效能低是有理由的，当从观测到的没有任何位置的县点总县数和前两次阶乘矩的比率（记作fo）来估计参数时，S的估计方程为：

$$\log f_0=\log(1-\hat{S})+\frac{(m^1_1-\hat{S})^2}{m^1_2-\left(m^1_1-\hat{S}\right)\left(m+\hat{S}\right)}$$

$$\log\frac{m^1_1-S}{m^1_1+m^1_2-\left(m^1_1+\hat{S}\right)\left(m^1_1-\hat{S}\right)-\hat{S}},$$

V和K的估计方程与应用动态方法是相同的。

举　　例

前已说明，概率法则p(x)，对于从历史时期1860年以来美国伊阿华州每次人口普查中，县的位置分布状态拟合良好。同时也指出，虽然还没有资料证实，同样的

概率法则对没有大都市区域的大多数州的县中位置的分布也是相当适合的。这个法则不希望用于描述人口稠密区域中的位置分布。因为概率法则的基本机制是一个离散型的，而不是刻划大都市区域特征的扩散型机制。

为了对大于州的区域验证这个模式，选择密西西比河沿岸的六个州（表1）作为一个区域。对这一大区中的单个州来说，由p(x)计算得到的频率，估计县中位置的数量其准确性非常好。但对由六个州组成的区域则不适宜（见表1）。在表1中，由π(x)计算出的频率，同观测得出的频率，具有较高水平的对应性。

为了使模式的验证更加令人信服，需要一个更大的非均质性的区域。故选择了美国（1950年）不列为标准都市区域范围内的一些州的县，求得区位数，，为取样县的10%，标准都市区的县是不包括到样本中的，这是因为，模式的假定条件不适用于人口扩散或集聚的地区。样本中有三个县具有七个位置，不用于参数估计。在一个以上的县中，位置分配给一定的位置人口比率最大的县，由p(x)和π(x)等计算而得的频率已列入表2中。考虑几个州所采用的位置和县的各种功能以及结构的定义，笔者认为π(x)和观测到的频率分布之间的对应性是可以接受的。

几点解释 本文探论的概率法则是为描述区域分布而设计的。这些区域分布，是由形成比随机分布类型更加规则（均匀）的分布类型过程而产生的。概率p(x)适合于“均质性”的区域，而概率法则π(x)则适用于某些“非均质性”的区域。这两个分布都不适合于聚集过程或扩散过程而形成的区域分布。

可是，条件（1）给出的资料表明，p(x)适用于描述均质性区域内的县内位置的分布。本文所给的资料表明，推导出的法则π(x)适用于描述较大的但均质性较差的区域中各县内位置的分布。这两组资料对由假定条件A—1和A—2确定的模式的重要性研究提供了实际的经验证明。概率法则p(x)是这个模式的基本方程，概率法则π(x)确定了非同一性区域的一种特殊情况，通过考虑其它类型的非均质性，或完全差异的复杂因素，可以得到这个基本概率法则的其它变化形式。概率法则π(x)以基本模式的参数中有关变化类型的简单假定作为基础。（虽然笔者认为是完全合理的）。经过分析的资料表明，p(x)或π(x)对区位在美国全国的许多区域中的分布提供了很好的逼近性。毫无疑问，将会发现这样的区域，这两个概率法则都不适用描述其资料。可是，这种证据应不致在分析过程中否定基本模式。因为形成区域规律性的过程只有两个进行了研究，而描述某些地理区域内城市位置的分布，肯定需要更多的约束条件。

模式对政治因素的依赖关系尚须做进一步的探讨，本文的这个模式是从县城城址和其它区位之间的差别而推导出的，同时依据行政区域讨论了城市位置类型。因此本模式基本上涉及到行政结构的区域含义。由此分析而得到的最重要结果，考虑到了城市系统和行政区域的区位之间的内部相关性。用以分析的资料显示出一个相关性，但不能期望其因果关系。一个尚需进行的关键性试验，是关于在更加一般的取样分类中，概率法则p(x)和π(x)用于位置分布的适应性问题。例如，可以研究位置在随机地配置于矩形取样分类中的分布。若这两个概率法则都不能用于描述区域类型，那么，模式的政治假定条件就要利用经验的证据予以确定了。

本文是侧重于概率法则对城市系统的

计算机生产的无级双变量等值区域地图

斯蒂芬·拉夫英及J·克拉克·阿恰

等值区域地图在地理分布的分析方面通常用于地图模式的目视比较。正因为如此，大量的制图研究者集中于面状分布吻合或相关程度的视觉传输的处理上（登脱，1965；……）。通常这些研究涉及到地图读者识别等值区域地图模式之间相似性或非相似性的能力，而这某等值区域地图是根据表示单变量分布的统计分级经符号化而得到的（穆勒，1976）。

单变量场合下的等值区域地图的制图技术已是一种多年来的规范化实践。然而，最近的研究启示人们，无级等值区域地图和双变量等值区域地图都成为有效的传输工具。本文另外提出了一种传达两种地理分布之间面状吻合程度的技术，它采用了在线划绘图机或CRT上产生无级双变量等值区域地图。除了考察这类地图的分析及专题背景以外，我们也要谈到为生产这类地图而研制的计算机程序——BICHOR的应用。

究竟要不要量子化　在地图设计中，人们早已采用数据分级方法来表示经过综合的地理分布形式。在1973年，这个传统方法受到了托布勒有创见地挑战。他提出不用分级间隔产生等值区域图，而用计算机驱动的线划绘图机以实际上为连续的灰色调生产出地图。他坚持认为地图读者有能力区分出地图上大量不同的灰色调，这正如他们有能力目视处理航空像片上的连续色调一样。托布勒很有创见地观察到，无级地图避免了使用分级间隔中固有的量子化误差问题。这一点很快就引起了常规知识捍卫者们的反应。反对无级地图的论据，主要依赖于人类的视觉处理系统在对信息的编码和贮存中的天生的局限性。这样，分级等值区域图比起无级等值区域地图来，在更大程度上考虑了人类处理机能的范围（道不森，1973，……）。

之所以会产生制图上的意见分岐，部分原因是基于对地图功能的认识这一哲学上的差异。托布勒的研究重点是分析制图，或者说将地图作为系统的阐述假设、验证假设，並且最终解释地理分布的一种工具（托布勒，1976）。分析制图主张，人们不光是简单地看看地图，而且要整体地及逐区地研究地图，以求获得地理上的解释。相反，地图传输所关心的是地理图解，其目的是以最小的感受误差快速传输一种分布的醒目的视觉特征。

彼得森在用分级与无级的等值区域图作地图对照的实验研究中，发现“在无级等值区域图上所描述的富余信息并不妨碍在这些地图之间所作的对照比较”（彼得森，

应用研究，然而不应得出这样的推论，即概率法则$\pi(x)$只局限于城市研究的有关问题。概率法则是对形成完全非均质性区域的地域规律性的变化过程而推导的。由于地理学家研究的许多现象受这种区位过程支配，所以函数$\pi(x)$应当是适用于描述并尽可能解释各种现象的区域分布问题的研究。

张克东 摘译自《Economic Geography》，VOI.42，NO.2，1966

李乃艳　刘妙龙校