

文简编号: 1007-6301 (1999) 03-255-08

# Davis 二倍数规律与 Zipf 三参数模型的等价性证明

## ——关于城市规模分布法则的一个理论探讨

陈彦光<sup>1</sup>, 刘继生<sup>2</sup>

(1. 信阳师范学院地理系, 信阳 464000; 2. 东北师范大学地理系, 长春 130024)

**摘要:** 本文从城市规模分布的 Davis 二倍数规律 ( $2^n$  规律:  $a_i = a_{i+n} \cdot 2^n$ ,  $f_i = f_{i+n} \cdot 2^{-n}$ ) 中推导出具有一般意义的三参数 Zipf 模型:  $P(r) = C(r - \alpha)^{-d_z}$ , 揭示了  $2^n$  规律隐含的分形几何性质, 论证了  $2^n$  法则为 Zipf 维数  $d_z = 1$  时的特殊情形, 并将  $2^n$  规律推广到具有普遍意义的  $\delta^n$  规律, 给出了 Zipf 维数及分维与邻级倍数  $\delta$  的数值关系:  $d_z = 1/D = \ln 2 / \ln \delta$  最后从三个方面对文中的理论成果进行了实证分析。

**关键词:** 城市体系; 城市规模分布; 分形; 分维

**中图分类号:** TU 984 **文献标识码:** A

## 1 引言

反映城市体系等级结构内在法则的重要内容之一是位序—规模律(rank-size rule), 其最常见的表达式为 Zipf 公式<sup>[1]</sup>

$$P(r) = P_1 r^{-q} \quad (1)$$

式中  $r$  为城市位序,  $P(r)$  为位序为  $r$  的城市人口规模,  $P_1$  为首位城市人口数(视为常数),  $q$  为分布指数。

由于式(1)在本质上是一个分形(fractal)模型,  $q$  具有分维(fractal dimension)意义<sup>[2]</sup>, 故有人称  $q$  为 Zipf 维数, 实际上它是分维的倒数, 即有  $q = 1/D$ 。

由于地理系统是一种适应性(adaptability)系统, 在不同条件下表现出不同的行为模式, 加之 Zipf 定律的数学本质和地理意义长期不清, 许多学者试图提出新的模型予以补充、修正或发展。这其中一个引人注目的成果是 K. Davis(1978)的二倍数( $2^n$ )规律<sup>[3]</sup>。实际上, Davis 规律也是分形的, 二倍数关系隐含着一一种特殊的分数维关系。为了总结有关城市体系等级结构的各种分形模型, 本文首先从数学上证明 Davis 模型是 Zipf 三参数定律的一个特

收稿日期: 1998-12; 修订日期: 1999-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(49771035); 河南省自然科学基金项目(974071200)

作者简介: 陈彦光(1965-), 男, 1987年毕业于华中师范大学地理系, 1995年在东北师范大学获硕士学位, 现任教于信阳师范学院地理系。从事地理分形和城市地理学研究, 重点研究分形城市系统, 发表《城市空间体系的 Koch 模式》等 30 余篇论文。

例, 据此将城市位序—规模定律推广到更为一般的形式, 然后借助 Davis 本人提供的原始数据等资料, 运用图解法对推导结果进行实证分析。

## 2 Davis 二倍数规律

Davis 在研究世界上 10 万人以上的城市规模分布时, 提出了所谓二倍数规律。以某种城市规模为底限, 对城市人口规模自下而上按二进制 (指数) 规则划分, 发现在一定标度范围内不同规模级的城市数目自上而下倍增: 某一级别的城市数目与其规模级的底限乘积为一常数。二倍数法则可用数学语言表示如下: 两级边界的关系满足

$$a_i = a_{i+n} \cdot 2^n \quad (2)$$

两级城市数目的关系为

$$f_i = f_{i+n} \cdot 2^n \quad (3)$$

显然

$$a_i f_i = a_{i+n} f_{i+n} = C \quad (4)$$

式中  $a_i$  为第  $i$  规模级的人口底限,  $a_{i+n}$  为比  $i$  级低  $n$  级的人口底限,  $f_i$  为第  $i$  规模级的城市数,  $f_{i+n}$  为比  $i$  级低  $n$  级的城市数 ( $i = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $C$  为常数。

$2^n$  规律在实际应用中似乎有很多局限。Davis 认为,  $2^n$  规律只有在样本足够多时才能成立 (它本来产生于对全世界城市的考察)。用它检验美国 1960、1970 年的城市人口资料, 每级之间的城市数的平均倍数分别为 1.94 和 1.90, 接近于 2。然而,  $2^n$  规律在中国的城市体系中并无明显的表现<sup>[4]</sup>。莫非  $2^n$  规律并不具有普遍意义?

我们研究发现,  $2^n$  规律实则一种分形规律, 它是城市规模分布 Zipf 定律在一般形式下其维数  $q = 1$  时的一种特例。下面给出详细的数学证明。

## 3 $2^n$ 规律与 Zipf 定律的关系

考虑到现实中不同级别的城市数目并非总是倍增, 可将式 (3) 推广到一般, 写作

$$f_i = f_{i+n} \cdot \delta^n \quad (5)$$

式中  $\delta = a_i/a_{i+1} > 1$  为常数, 可以称之为邻级规模倍数。此时式 (4) 不再成立。令  $i = 0$ , 将变量连续化为  $n = x$  ( $0, \dots$ ), 则有  $dN(x) \sim f_n$ ,  $r(x) \sim a_n$ , 这里  $N$  为城市累积数目,  $r$  为城市人口尺度, 于是得微分方程

$$\frac{dN(x)}{dx} = f_0 \cdot \delta^x \quad (6)$$

及指数函数

$$r(x) = a_0 \cdot 2^{-x} \quad (7)$$

对式 (7) 求导化为微分方程

$$\frac{dr(x)}{dx} = -a_0 \cdot \ln 2 \cdot 2^{-x} \quad (8)$$

用式 (8) 除式 (6) 得到

$$\frac{dN(x)}{dr(x)} = -\frac{f_0}{a_0 \ln 2} \cdot (2\delta)^x \quad (9)$$

在式 (7) 两边取以  $2\delta$  为底的对数, 化为

$$x = \lg_2 a_0 - \frac{\lg_2 \delta r(x)}{\lg_2 \delta} \quad (10)$$

代入式(9) 消去  $x$ , 可得

$$\frac{dN(r)}{dr} = - \frac{f_0 \cdot (2\delta)^{\lg_2 a_0}}{a_0 \ln 2} r^{-1/\lg_2 \delta^2} \quad (11)$$

从  $P_1$  到  $P$  积分, 并考虑到实际地理意义(结果非负), 得

$$\begin{aligned} N(P) &= - \frac{f_0 (2\delta)^{\lg_2 a_0}}{a_0 \ln 2} \int_{P_1}^P r^{-1/\lg_2 \delta^2} dr \\ &= \frac{f_0 (2\delta)^{\lg_2 a_0 / \ln 2}}{a_0 \ln \delta} (P^{-\ln \delta / \ln 2} - P_1^{-\ln \delta / \ln 2}) \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $P_1$  为首位城市人口。根据实际地理意义, 应在式(12)右边加上修正性参数  $k$ ,  $k$  表示最高级城市数目, 显然, 一般  $k=1$ 。移项化为

$$P(N) = C(N - \alpha)^{-d_z} \quad (13)$$

这正是 Mandelbrot 提出的三参数 Zipf 公式, 式中  $C = [f_0 (2\delta)^{\lg_2 a_0 / \ln 2} / a_0 \ln \delta]^{\ln 2 / \ln \delta}$  为常数,  $\alpha = k - f_0 (2\delta)^{\lg_2 a_0 / \ln 2} / (a_0 \ln \delta) P_1^{\ln \delta / \ln 2}$  可被视为辅助性小常数, 其作用是使低频的城市规律(当  $\alpha > 0$ )或高频的城市规律(当  $\alpha < 0$ )与公式相符,  $d_z = \ln 2 / \ln \delta$  为 Zipf 维数。可见, 式(13)实则是式(1)的推广形式, 当  $\alpha=0$  时, 就变成通常的 Zipf 公式。

早在 50 年代, Mandelbrot 从信息论和概率论出发, 在语言学的词频分布中引导出三参数 Zipf 模型

$$Z(r) = C(r - \alpha)^{-d_z} \quad (14)$$

式中  $r$  为词序,  $Z(r)$  为相应的词频。本文的论证表明, 三参数 Zipf 定律也是城市规模分布律的一般形式。

由于  $\delta > 1$ , 故有  $d_z > 0$ , 当  $\delta=2$  时,  $d_z = \ln 2 / \ln 2 = 1$ , 可见 Davis 二倍数规律实质上是城市规模分布的 Zipf 维数等于 1 时的自然分布律, 是 Zipf 定律在一般形式(三参数)下的一种特殊情形(分维  $D = 1/d_z = 1$ )<sup>[5]</sup>。下面利用 Davis 提供的数据等资料进行实证分析。

## 4 实证分析

可以从三个角度对前面的理论推导进行检验。首先分析 Davis 从中发现二倍数规律的数据资料。对 Davis 的分级结果进行累加(表 1、表 2), 然后取对数, 将点列  $(\ln a_i, \ln \sum_i f_i)$  绘成坐标图(图 1、图 2)。

从表 1、表 2 中可以看出, Davis 的世界城市分级并非全部满足  $2^n$  规律, 而是在一定标度区范围内满足: 不论按照哪一种划分, 都是从第 3 级往下( $i=3-7$ )才比较严格地满足  $2^n$  规律。而图 1、图 2 则显示, 在满足  $2^n$  规律的区间内, 点列  $(a_i, \sum f_i)$  呈对数线性分布, 这暗示着世界城市的规模分布具有分形几何性质,  $2^n$  规律区间实质上是所谓无标度区(non-scaling range)。

图 1、图 2 还显示, 从 1950 年到 1970 年, 点列的对数线性性态逐渐变好, 无标度区有扩大的趋势。这意味着随着世界经济联系的加强, 世界城市体系的整体性增强, 从而其分形性质也有所增强。

表 1 世界城市规模分级及各级城市数累加处理 ( I ) ( 1950~ 1970)

Tab. 1 The first grading result of the world city-sizes and the corresponding cumulative numbers of cities in different levels ( I ): 1950~ 1970

序号	规模级/万人		1950 年			1960 年			1970 年		
(i)	$a_i$	$\ln a_i$	$f_i$	$\sum_i f_i$	$\ln \sum_i f_i$	$f_i$	$\sum_i f_i$	$\ln \sum_i f_i$	$f_i$	$\sum_i f_i$	$\ln \sum_i f_i$
0	1 280	7.155	0	0	-	1	1	0	1	1	0
1	640	6.461	2	2	0.693	6	7	1.946	14	15	2.708
2	320	5.768	10	12	2.485	14	21	3.045	18	33	3.497
3	160	5.075	29	41	3.714	42	63	4.143	61	94	4.543
4	80	4.382	59	100	4.605	93	156	5.050	128	222	5.403
5	40	3.689	127	227	5.425	163	319	5.765	232	454	6.118
6	20	2.996	251	478	6.170	340	659	6.491	479	933	6.838
7	10	2.303	484	962	6.869	641	1300	7.170	844	1777	7.483

资料来源: K. Davis(1978), 见文献[3]。

表 2 世界城市规模分级及各级城市数累加处理 ( II ) ( 1950~ 1970)

Tab. 2 The second grading result of the world city-sizes and the corresponding cumulative numbers of cities in different levels ( II ): 1950~ 1970

序号	规模级/万人		1950 年			1960 年			1970 年		
(i)	$a_i$	$\ln a_i$	$f_i$	$\sum_i f_i$	$\ln \sum_i f_i$	$f_i$	$\sum_i f_i$	$\ln \sum_i f_i$	$f_i$	$\sum_i f_i$	$\ln \sum_i f_i$
0	800	6.685	2	2	0.693	3	3	1.099	10	10	2.303
1	400	5.991	9	11	2.398	13	16	2.773	17	27	3.296
2	200	5.298	15	26	3.258	27	43	3.761	43	70	4.248
3	100	4.605	53	79	4.369	71	114	4.736	104	174	5.159
4	50	3.912	108	187	5.231	138	252	5.529	179	353	5.866
5	25	3.219	189	376	5.930	268	520	6.254	384	737	6.603
6	12.5	2.526	381	757	6.629	551	1071	6.976	731	1468	7.292
7	10	2.303	205	962	6.869	229	1300	7.170	309	1777	7.483

资料来源: 同表 1。

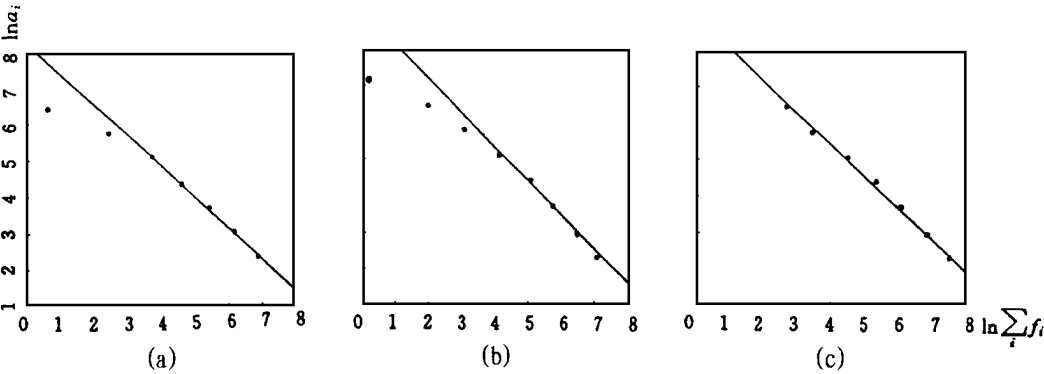


图 1 世界城市规模级底限( $a_i$ )- 各级城市累积数( $\sum_i f_i$ ) 双对数坐标图(对应于表 1)

Fig. 1 The log-log plots of the lower limits of the world city-size grades and corresponding cumulants of city numbers at different levels (according to Tab. 1)

(a) 1950 年 (b) 1960 年 (c) 1970 年

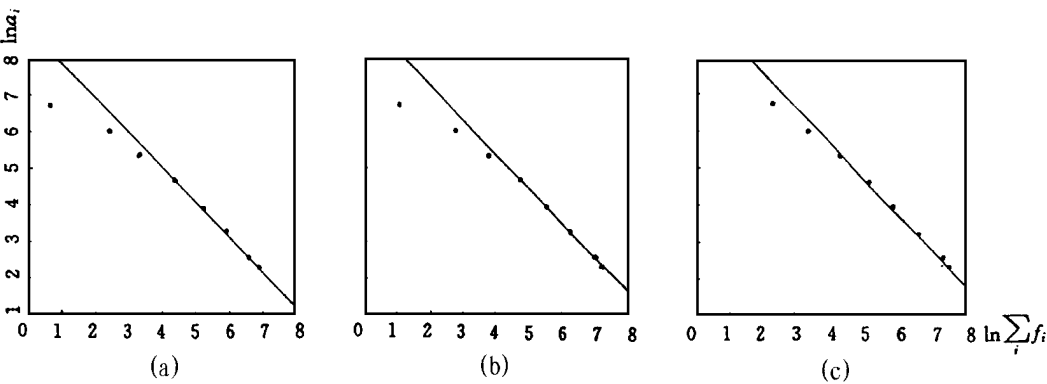


图 2 世界城市规模级底限( $a_i$ )- 各级城市累积数( $\sum f_i$ ) 双对数坐标图(对应于表 2)

Fig. 2 The log-log plots of the lower limits of the world city-size grades and corresponding cumulants of city numbers at different levels (according to Tab. 2)  
(a) 1950 年 (b) 1960 年 (c) 1970 年

表 3 世界城市规模分布的 Zipf 维数及有关参数(Ⅰ):  $\alpha=0$  (依据表 1)

Tab. 3 The Zipf dimension of the world city-size distributions and related parameters (Ⅰ):  $\alpha=0$  (according to Tab. 1)

年 份	1950 年		1960 年		1970 年	
计算范围( $i$ )	3~ 7	2~ 7	3~ 7	2~ 7	3~ 7	1~ 7
$d_z$ 值	1. 136	1. 241	1. 081	1. 170	1. 050	1. 164
$\ln C$ 值	9. 549	9. 887	9. 713	9. 999	9. 971	10. 327
测定系数( $R^2$ )	0. 998	0. 989	0. 997	0. 991	0. 997	0. 994

表 4 世界城市规模分布的 Zipf 维数及有关参数(Ⅱ):  $\alpha=0$  (依据表 2)

Tab. 4 The Zipf dimension of the world city-size distributions and related parameters (Ⅱ):  $\alpha=0$  (according to Tab. 2)

年 份	1950 年		1960 年		1970 年	
计算范围( $i$ )	3~ 7	2~ 7	3~ 7	2~ 7	3~ 7	0~ 7
$d_z$ 值	1. 070	1. 171	1. 058	1. 123	1. 017	1. 169
$\ln C$ 值	9. 351	9. 647	9. 638	9. 828	9. 849	10. 329
测定系数( $R^2$ )	0. 998	0. 991	0. 999	0. 996	1. 000	0. 994

可以利用图 1、图 2 中直线段的斜率计算 Zipf 维数。为了更好地说明问题, 本文采用不同的无标度区间, 借助最小二乘法计算维数。考虑到公式推导过程中从离散到连续的转换误差, 在实际应用时, 应将式(13)的模型参数均作为待定系数。为简化分析过程, 先将辅助性参数取为 0, 即令  $\alpha=0$ , 然后在不同的区间范围内计算各年的 Zipf 维数, 发现在无标度区间内,  $d_z$  值接近于 1, 而且随着系统的发展,  $d_z$  值向 1 不断接近。这表明世界城市规模分布的分形形态逐渐变好, 从而其 Zipf 维数更加接近自然水平( $q=1$ )。

进一步考察发现, 加上适当的修正参数( $\alpha \neq 0$ )时, 模型的拟合效果更好(表 5)。从表 5 中可见, 拟合 1970 年的世界城市规模分级数据, 修正性参数应取负数。对于第一种分级法

(表 1), 取  $\alpha$  为 - 4 到 - 5 之间的数值可将  $d_z$  校正到自然水平; 对于第二种分级法(表 2), 取  $\alpha$  为 - 2 到 - 3 之间的数值可将  $d_z$  校正到  $d_z = 1$  左右。对于其他年份的数据处理, 可以如法炮制。运用三参数 Zipf 模型的拟合效果比常规模型为佳, 也比直接应用  $2^n$  法则如式(4)更好。

表 5 修正性参数与 Zipf 维数的校正结果(1970)

Tab. 5 The different adjutant parameter values and corresponding correction of Zipf dimensions of the world city-size distributions (1970)

分级方法	第Ⅰ种分级法			第Ⅱ种分级法		
修正参数( $\alpha$ )	$\alpha = 1$	$\alpha = - 4$	$\alpha = - 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = - 2$	$\alpha = - 3$
$d_z$ 值	1. 069	1. 007	0. 996	1. 024	1. 001	0. 994
$\ln C$ 值	10. 002	9. 862	9. 837	9. 864	9. 819	9. 805
测定系数( $R^2$ )	0. 997	0. 999	0. 999	1. 000	1. 000	1. 000

注: 表中的计算区间均为  $i \in [3, 7]$ 。

第二个方面的检验可借助于 Davis 提供的美国资料。从前面的数学推导过程中, 可以得到 Zipf 维数  $d_z$  与邻级规模倍数  $\delta$  之间的数值关系

$$d_z = \frac{\ln 2}{\ln \delta}$$

(15)

从而分维  $D$  与  $\delta$  的关系式为

$$D = \frac{1}{d_z} = \frac{\ln \delta}{\ln 2} \quad \text{或} \quad \delta = 2^D = 1^{1/d_z}$$

(16)

借助式(15)和式(16)可对城市规模分布的 Zipf 维数和分维值进行检测或估算。根据 Davis 的考察, 美国在 1960 年和 1970 的城市规模邻级倍数分别为  $\delta_1 = 1.94$  和  $\delta_2 = 1.90$ , 代入式(15)或式(16)可知, 在 1960 年,  $d_z = 1.046$  或  $D = 0.956$ ; 1970 年,  $d_z = 1.080$  或  $D = 0.926$ 。根据联合国人口统计年鉴, 美国城市规模分布的 Pareto 指数即分维在 1973 年约为  $0.95^{[6]}$ , 这与前面估算的 1970 年的维数  $0.926$  很接近。

第三个方面的检验是根据中国的统计资料。现以河南省城市人口数据进行说明。真正能反映城市规模分布规律的应是城市建成区内的常居人口数量, 但我国目前的统计资料一般不提供这类数据, 只给出市区人口。考虑到非农业人口基本上集中于建成区内且与区内总人口成比例, 可借助非农业人口进行考察。如前所述, 只有当  $d_z = 1$  时, 城市规模分布才会出现  $2^n$  规律。通过计算发现, 河南省城市规模分布的 Zipf 维数在 1992 年时接近于 1 ( $d_z = 1.002$ )。1992 年河南省共设 27 市, 参考 1993 年的数据, 可知非农业人口规模大于 6 万的城市数目 29 个。按照 6, 12, 24, ... 的方法分级, 可得一个近似于  $2^n$  法则的结果(表 6), 据此可算出  $\delta = 1.979 \approx 2$ , 非常接近于  $2^n$  规律。将  $\delta = 1.979$  代入式(15)或式(16)可得  $d_z = 1.015$ ,  $D = 0.985$ ; 而运用 1992 年 27 市的数据回归算得  $d_z = 1.002$ ,  $D = 0.998$ , 考虑到不同处理方法涉及的城市数目不同, 两种结果可谓非常接近。可见城市规模分布是否满足  $2^n$  规律, 并不在于样本的多少, 而在于是否符合  $d_z = 1$  的 Zipf 分布。实际上, 河南省城市位序—规模点列  $(r, P(r))$  的对数线性性态并不甚好, 即其分形性质局部退化, 否则一定更加接近  $2^n$  法则。

表 6 河南省城市规模分级结果(1992)

Tab. 6 The graded result of size of the cities of Henan, China

$a_i$	192	96	48	24	12	6	$\sum f_i$
$f_i$	0	1	3	4	9	12	29

注: 源数据取自河南省城市社会经济调查队编《河南城市统计年鉴》, 中国统计出版社, 1993~ 1994。

综合以上分析可知, Davis 二倍数规律在本质上是一种三参数 Zipf 模型, 而由于后者带有一个“微调”参数, 其实际拟合效果往往更好。现实中的城市规模分布是否具有  $2^n$  规律, 可从以下几个方面进行判断:

第一, 观察城市规模分布是否具有分形性质, 即位序—规模点列是否具有对数线性性质, 如是, 则可能具备  $2^n$  规律, 否则不具备。

第二, 如果城市规模分布具有分形性质, 看其是否符合三参数模型, 如是, 则可能具备  $2^n$  性质; 如果符合式(1), 则视为  $\alpha=0$  的情形, 仍可作进一步考虑。

第三, 如果城市规模分布符合三参数模型, 看其 Zipf 维数  $d_z$  是否为 1, 如是, 则一定具有  $2^n$  规律; 否则, 应具有  $\delta^n$  规律, 这时  $\delta$  为大于 1 的任意实数。

5 结论

(1) Davis 二倍数规律与 Mandelbrot 的三参数 Zipf 模型等价

Davis 规律虽然本质不新, 但却具有重要的学术意义。Mandelbrot 的三参数 Zipf 定律并非出自地理学, 而是来自语言学。Davis 的发现其真正意义在于提示了三参数 Zipf 模型在城市规模分布中的体现。三参数 Zipf 公式作为二参数公式的推广, 比二参数形式更具有一般性。

(2) Davis 二倍数规律隐含着一种特殊的自相似性质(self-similarity)

从  $2^n$  规律中导出三参数 Zipf 公式意味着这类城市规模分布具有分形几何特征。Davis 规律的学术意义还在于, 它表明分维  $D=1$  是城市规模分布的自然状态: 由于 Davis 研究的是世界范围的城市规模分布, 而系统的总体性态往往代表子系统的理想状态, 因而 Zipf 维数  $d_z=1$  可能是一种自然水平的城市规模分布。

(3) Davis 的二倍数规律可被推广到一般形式, 从而与三参数 Zipf 定律完全对应

根据前面的数学变换和实证分析可知, 完全可以将  $2^n$  规律推广为  $\delta^n$  规律,  $\delta$  为大于 1 的任意实数。当且仅当  $d_z=1$  时,  $\delta=2$  为标准的二倍数规律; 当  $d_z \neq 1$  时,  $\delta$  也不再为 2。按照二进制原则对城市规模数据进行适当地分级取得平均邻级倍数  $\delta$  值, 可以方便地检验或估算城市体系等级结构的分维值。

参考文献:

[1] Zipf G K. Human Behavior and the Principal of Least Effort[M]. MA: Addison-Wesley, Reading, 1949  
[2] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. NY: W. H. Freeman, 1982  
[3] Davis K. World Urbanization: 1950- 1970[A]. In: Bourne L S, Simmons J W (Eds). Systems of Cities[C]. NY: Oxford University Press, 1978. 92~ 100  
[4] 周一星. 城市地理学[M]. 北京: 商务印书馆, 1995. 265

- [5] 陈彦光, 罗静 城市位序-规模问题的分形理论初探——Zipf 定律的理论来源、异化形式及其统一基础[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 1998, 11(3): 264~ 268
- [6] Reohner B M. The long-term trend toward increased dispersion in the distributions of city sizes[J]. *Environment and Planning A*, 1991, 23(2): 1725~ 1740

## A Proof of Davis' $2^n$ -law as a Special Equivalent of the Three- parameter Zipf Model

CHEN Yan-guang<sup>1</sup>, L U Ji-sheng<sup>2</sup>

(1.Department of Geography, Xinyang Teachers College, Xinyang, Henan 464000, China

2.Department of Geography, Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

**Abstract:** The Zipf's model with three parameters,  $P(r) = C(r - \alpha)^{-d_z}$ , is deduced from Davis'  $2^n$ -law:  $a_i = a_{i+n} \cdot 2^n$ ,  $f_i = f_{i+n} \cdot 2^{-n}$ , by means of a series of mathematical transformation, where  $d_z$  proves to have some nature of fractal dimension ( $D$ ) because  $d_z = 1/D$ . The  $2^n$ -rule is generalized to  $\delta^n$  rule and  $\delta$  represents an arbitrary number which is greater than one, namely  $\delta > 1$ . The relationships between  $\delta$  and the fractal dimensions of city-size distributions can be expressed as  $D = \ln \delta / \ln 2$ : when  $\delta = 2$ , we have  $d_z = 1$ , so the  $2^n$  rule is only a special case of the three parameter Zipf's model. The result of the demonstration of Davis' law as an equivalent of the generalized Zipf's law is illustrated and verified by some examples including the data in which  $2^n$ -rule of urban systems is discovered.

**Key words:** Urban system; City-size Distribution; Fractal; Fractal dimension